Solitoni
osnovni pojmovi

Bojan Đuričković

decembar 2003*

Sadržaj

*posljednja izmjena: 17. mart 2004 (reformatirano u LaTeX-u, dodani konturni grafovi, i korigirano nekoliko sitnih propusta.)

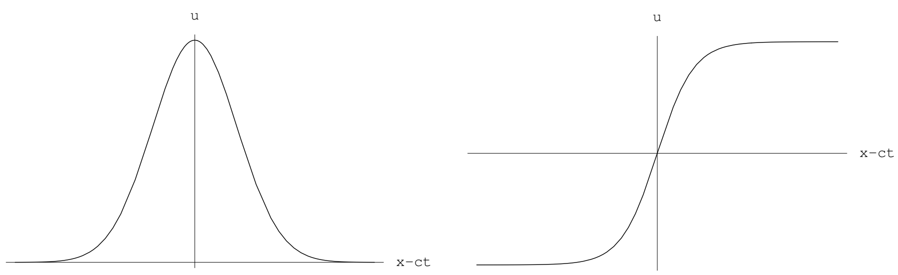
1 Šta su solitoni?

Izraz *soliton* je izveden od engleskog *solitary wave* (u prevodu: *osamljeni val*). U širem smislu, pod njim se podrazumijevaju valovi koji su ograničeni u prostoru (lokalizirani) i kreću se ne mijenjajući svoj oblik. U užem smislu, solitonima se označavaju rješenja određenih nelinearnih diferencijalnih jednadžbi (solitonskih jednadžbi) uz odgovarajuće rubne uvjete (koji osiguravaju lokaliziranost).

Očigledan primjer solitona (u širem smislu riječi) jeste valni paket — rješenje (linearne) d'Alembertove jednadžbe u nedisperzivnoj sredini. Poznata je pojava da disperzija utiče na valni paket tako da se njegov oblik mijenja, tj. da se s vremenom širi, a njegova lokalizacija gubi. Interesantno je, međutim, da u određenim uslovima postoje nelinearni valovi čija nelinearnost upravo kompenzira disperziju, tako da val, šireći se, neograničeno zadržava svoj oblik. Ovo su solitoni u užem smislu riječi. (U daljem tekstu ćemo podrazumijevati ovu, užu definiciju solitona.)

Terminologija u ovom polju još je nestandardizirana. Tako neki autori koriste *soliton* i *solitary wave* kao sinonime, dok je kod drugih ovaj prvi uži pojam od ovog zadnjeg. Osamljeni valovi (*solitary waves*) se nekad definiraju kao lokalizirani putujući valovi, a solitoni kao osamljeni valovi koji pri sudaru sa drugim osamljenim valovima asimptotski zadržavaju oblik i brzinu.

Dva tipa solitonskih valova su skicirani na slici 1. Iako se lokalizirani



Slika 1: Dva tipa solitonskih valova.

valovi mogu tumačiti tako da obuhvaćaju samo prvi tip, korisno je definiciju proširiti i na drugi, jer deriviranjem ovaj tip prelazi u prvi.

2 Istorijski uvod

2.1 Otkriće i prvi matematički modeli

Solitonski val je po prvi put uočio škotski inženjer John Scott Russel 1834. godine. Evo tog događaja opisanog njegovim riječima:

> Proučavao sam kretanje broda kojeg je par konjâ brzo vukao duž uskog kanala, kada se brod iznenada zaustavio — ali ne i masa vode u kanalu koju je on pokrenuo; ona se akumulirala oko pramca broda u stanju žestoke pobuđenosti, zatim, naglo ostavivši ga iza sebe, krenula naprijed velikom brzinom, uzimajući oblik velikog osamljenog izdignuća, zaobljene, glatke i dobro definirane gomile vode, koja je nastavila svoj put duž kanala bez vidljive promjene oblika i smanjenja brzine. Slijedio sam je na konju, i pretekao je, dok se ona kretala brzinom od nekih osam ili devet milja na sat, zadržavajući početni oblik od nekih trideset stopa dužine i stope do stope i po visine. Postepeno se smanjila, i nakon praćenja od jedne ili dvije milje, izgubio sam je u zavojima kanala. To je bio, u mjesecu avgustu 1834. godine, moj prvi susret sa tim jedinstvenim i lijepim fenomenom kojeg sam nazvao Translacijski val. [1]

Scott Russelovu oduševljenost, međutim, nisu podijelili fizičari njegovog vremena, tako da je fenomen dosta dugo ostao neistražen, a Scott Russel zapamćen po drugim dostignućima.

Prvi matematički opis osamljenih valova (tj. solitona) u plitkoj vodi dali su D. J. Korteweg i G. de Vries 1895. godine. Zatim je opet uslijedilo zatišje, sve do 1960-tih godina, kada je razvoj računarske tehnike omogućio da se numeričkim proračunima dođe do nekoliko različitih tipova jednadžbi koje daju solitonska rješenja. Ipak, Korteweg – de Vriesova jednadžba je do danas vjerovatno najpoznatija nelinearna disperzivna jednacina.

2.2 Solitoni i čestice

S pojavom kvantne mehanike i ideje o valovima materije, pomislilo se da bi solitoni mogli biti valovi koji bi opisivali materiju. Međutim, brzo se uvidjelo da raspršenja solitona ne odgovaraju raspršenjima čestica. Naime, solitoni naprosto prolaze jedni kroz druge, bez promjene smjera kretanja, brzine i oblika, a jedini efekat raspršenja je eventualni pomak u fazi.

---

[1] Ova pojava je uspješno rekonstruirana u julu 1995. godine, na istom mjestu gdje ju je prvi put uočio Scott Russell – na Union Canal-u, blizu Edinburga. Očevici ove rekonstrukcije bili su naučnici okupljeni na konferenciji o nelinearnim valovima koja se održavala na Herriot-Watt univerzitetu, blizu samog kanala. Više o ovome, kao i originalni tekst Scott Russellovog citata, može se naći na [5].

Ipak, solitoni su našli svoje mjesto u opisivanju materije: oni danas predstavljaju jedan od osnovnih pojmova u teoriji struna (engl. *string theory*).

3 Nelinearnosti u fizici i princip superpozicije

Prije nego što se posvetimo analitičkom rješavanju Korteweg – de Vriesove (u daljem tekstu skraćeno KdV) jednadžbe, zastanimo čas na pojmu nelinearnosti općenito. Naime, nelinearne pojave su još uvijek slabo istražene u fizici. U nastavi fizike su tako malo zastupljene da se tokom čitavog školovanja (uključujući i visoko) praktično i ne susretne sa ičim što odstupa od linearnosti i linearnog principa superpozicije. Rezultat ovoga jeste da se linearna superpozicija uzima a priori. Međutim, uvijek treba imati na umu da, koliko god se dobro slagao sa opažanjima, linearni pristup gotovo uvijek predstavlja tek prvi član u razvoju prirode u beskonačni red.

Prema linearnoj superpoziciji, suma dva rješenja je opet rješenje iste jednadžbe. U nelinearnim sistemima situacija se, pak, jako usložnjava: postupak nalaženja rješenja koje bi bilo neka vrsta "kombinacije" dvaju polaznih rješenja je daleko složeniji od pukog zbrajanja, i često u konkretnim slučajevima kombinovano rješenje nije moguće izraziti analitički, već se može dobiti tek numeričkim proračunima. Kada se ovdje govori o kombinovanju rješenja, treba biti na oprezu: "kombinovano rješenje" je tek matematički postupak nalaženja dodatnih rješenja na osnovu postojećih, pri čemu je moguće, kao što je to slučaj sa KdV jednadžbom, da se nelinearnom superpozicijom dva regularna (fizikalno prihvatljiva) rješenja dobije neregularno (fizikalno neprihvatljivo) rješenje, i obratno, da se kombinacijom jednog regularnog i jednog neregularnog rješenja opet dobije regularno rješenje.

Fourierova analiza, osnovni alat proučavanja linearnih valova, u nelinearnim sistemima ima samo sekundaran značaj: razlaganje vala u Fourierov spektar više ne predstavlja njegovu dekompoziciju po svojstvenim funkcijama, već nije ništa više nego sredstvo za analizu forme vala.

Zalaženjem u nelinearno, fizičar ostaje bez tog moćnog oružja koje jeste linearna superpozicija, a koje mu je u velikoj mjeri olakšavalo koračanje kroz područje linearnog omogućavajuci mu zornu predodžbu problema svođenjem na vektorske vizuelizacije.

4 Korteweg – de Vries jednadžba

KdV jednadžba u svom najjednostavnijem obliku glasi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \tag{1}$$

Nelinearnost leži u srednjem članu, koji predstavlja produkt valne funkcije i prostorne derivacije valne funkcije, dok je jednadžba trećeg reda.

Kako je već rečeno, ova jednadžba je prvobitno osmišljena za opisivanje valova na plitkoj vodi. Međutim, danas ova jednadžba važi za tipičnu jednadžbu u fizici, koja se javlja u raznim oblastima i opisuje sistemime tako različitih priroda kao što su[2]:

- jonsko-akustični valovi u plazmi,
- magnetohidrodinamički valovi u plazmi,
- anharmonična rešetka,
- longitudinalni disperzivni valovi u elastičnom štapu,
- valovi pritiska u tečno-plinovitim smjesama,
- rotirajući tok niz cijev,
- termički pobuđeni paketi fonona u niskotemperaturnim nelinearnim kristalima.

Osim ovih modela konkretnih fizikalnih sistema, KdV jednadžba, pod određenim uslovima, proizlazi i iz apstraktnog Sturm-Liouville-ovog problema (vidjeti [4], poglavlja 1.1 i 1.2).

4.1 Rješenje direktnom integracijom

Najprije pođimo od pretpostavke da tražimo rješenje u obliku putujućeg vala. Prema tome, ovisnost valne funkcije o prostoru i vremenu mora biti oblika $u(x,t) = u(x-ct)$, gdje je c – brzina prostiranja vala duž x-osi. Označavajući fazu valne funkcije sa $\xi = x - ct$, sveli smo parcijalnu KdV jednadžbu na običnu diferencijalnu jednadžbu po varijabli ξ:

$$(u-c)\frac{du}{d\xi} + \frac{d^3u}{d\xi^3} = 0 \quad .$$

Integrirajući, dobija se:

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} = cu - \frac{u^2}{2} \quad .$$

U ovoj jednadžbi, aditivna konstanta je izjednačena s nulom, kako bi se osiguralo da $d^2u/d\xi^2 \to 0$ uz $u \to 0$ za velike ξ, tako da je u lokalizirano oko karakterističnog $\xi = 0$, odnosno $x = ct$. Množenjem posljednje jednadžbe sa $du/d\xi$ i ponovnim integriranjem dolazi se do:

$$\left(\frac{du}{d\xi}\right)^2 = cu^2 - \frac{u^3}{3} \quad ,$$

[2]Reference relevantnih članaka u pojedinim navedenim oblastima mogu se naći u [2, str. 1446].

gdje smo opet, zbog pretpostavke o lokalizaciji, uzeli da $du/d\xi \to 0$ za velike ξ. Korjenujući ovu jednadžbu i još jednom integrirajući, dobija se solitonsko rješenje:

$$u(x-ct) = \frac{3c}{\cosh^2\left(\sqrt{c}\,\frac{x-ct}{2}\right)} \quad . \tag{2}$$

4.2 Svojstva solitonskog rješenja

Ono što se odmah može uočiti u rješenju (2) jesu odlike karakteristične za sve solitone:

- amplituda vala raste s brzinom

- širina vala se s brzinom smanjuje

Brži valovi su, dakle, bolje lokalizirani i imaju veću amplitudu od sporijih.

Što se tiče same KdV jednadžbe, faktor u rješenju je stvar konvencije, jer se iz gore navedenog oblika (1) KdV jednadžbe može doći u poopćeni oblik supstitucijom $u \to \alpha u$, pri čemu jednadžba postaje:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial u^3} = 0 \quad .$$

Često se, pogodnosti radi, uzima $\alpha = 6$, pa KdV jednadžba u obliku za koji se može reći da je standardan glasi:

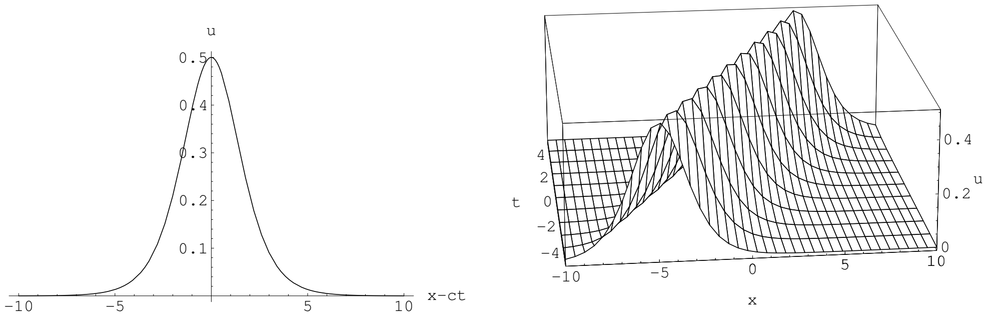
$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial u^3} = 0 \quad . \tag{3}$$

Solitonsko rješenje (2) tada postaje:

$$u(x-ct) = \frac{c}{2\cosh^2\left(\sqrt{c}\,\frac{x-ct}{2}\right)} \tag{4}$$

Treba primjetiti da je, za razliku od linearnih valnih jednadžbi, gdje je faktor, odn. amplituda valne funkcije stvar početnih uvjeta ili normiranja (jer u linearnom homogenom slučaju vrijedi da, ako je u rješenje, onda je i Cu rješenje, za proizvoljnu konstantu C) — ovdje, zbog nelinearnosti, amplituda određena samom jednadžbom. Ovo je općenito svojstvo nelinearnih jednadžbi.

Rješenje (4) je, za jediničnu brzinu c, grafički prikazano na slici 2, pri čemu apscisa predstavlja fazu $\xi = x - ct$, a ordinata amplitudu vala (*lijevo*), odnosno kao trodimenzionalni prostorno-vremenski prikaz (*desno*).



Slika 2: Jednosolitonsko rješenje (4) KdV jednadžbe ($c = 1$).

Ukoliko si želimo predočiti kretanje ovog vala u prostoru i vremenu, dovoljno je uočiti da se prostorna tačka u kojoj je faza jednaka nuli ($x-ct = 0$) ravnomjerno kreće brzinom c u pozitivnom smjeru x-osi. Isto vrijedi i za bilo koju drugu vrijednost faze, tako da se cijela forma vala, bez promjene oblika, ravnomjerno translatira u pozitivnom smjeru x-osi brzinom c.

Oblik ovog solitona je vrlo sličan gausijanu: gladak je, simetričan, sa izraženim maksimumom, i vrlo brzo trne.

Primjetimo još da grafikon solitona s proizvoljnom brzinom c izgleda potpuno jednako – dovoljno je promijeniti skalu ordinate $u \to cu$ uz istovremenu promjenu skale apscise $\xi \to \xi/\sqrt{c}$.

4.3 Nelinearna superpozicija

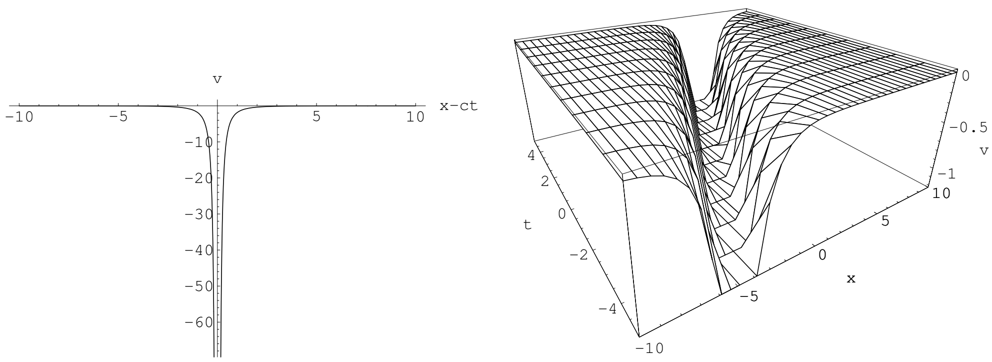
Do sada smo promatrali samo jednosolitonske valove, tj. rješenja koja predstavljaju izolirani soliton koji se kreće u prostoru. Da bismo proučili interakciju dva solitona, ne možemo prosto superponirati dva solitona (linearna superpozicija ne vrijedi!), već je potrebno naći dubletsko rješenje KdV jednadžbe. Fizikalno zadovoljavajuće dubletsko rješenje se dobiva pomoću tzv. Bäcklundove transformacije (opširnije vidjeti u [1]), kombinacijom rješenja (4) i jednog drugog rješenja jednadžbe (3)[3]:

$$v(x-ct) = \frac{c}{2\sinh^2\left(\sqrt{c}\,\frac{x-ct}{2}\right)} \tag{5}$$

Da je i ovo zaista rješenje polazne jednadžbe, može se provjeriti uvrštavanjem. Međutim, ovo rješenje je neregularno: ono nije fizikalno prihvatljivo zbog divergencije u području gdje faza $x - ct$ iščezava.

(Nelinearnom) superpozicijom rješenja (4) i (5) dobija se opet regularno rješenje. Ovaj dublet, koji predstavlja raspršenje dva solitona koji se kreću u istom smjeru različitim brzinama prikazan je na slici 4.

[3] Za kombinaciju dva rješenja oblika (4) se pokazuje da je neregularna.



Slika 3: Iregularno rješenje (5) KdV jednadžbe ($c = 1$).

I brži i sporiji val asimptotski zadržavaju oblik za $t \to \pm\infty$. Međutim, ono što je interesantno za uočiti ovdje jeste pomak u fazi koji se dešava oko trenutka $t = 0$: sporiji val doživljava fazni pomak unazad, a brži – fazni pomak unaprijed. U stvari ovo se zbiva kao da oko trenutka $t = 0$ dva solitona zamijene uloge. Ovaj efekat je tim izraženiji što je manja razlika između brzina dva solitona.[4]

5 Druge solitonske jednadžbe

5.1 Sinus-Gordonova jednadžba

Sinus-Gordonova jednadžba glasi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sin u$$

Solitonska rješenja ove jednadžbe su:

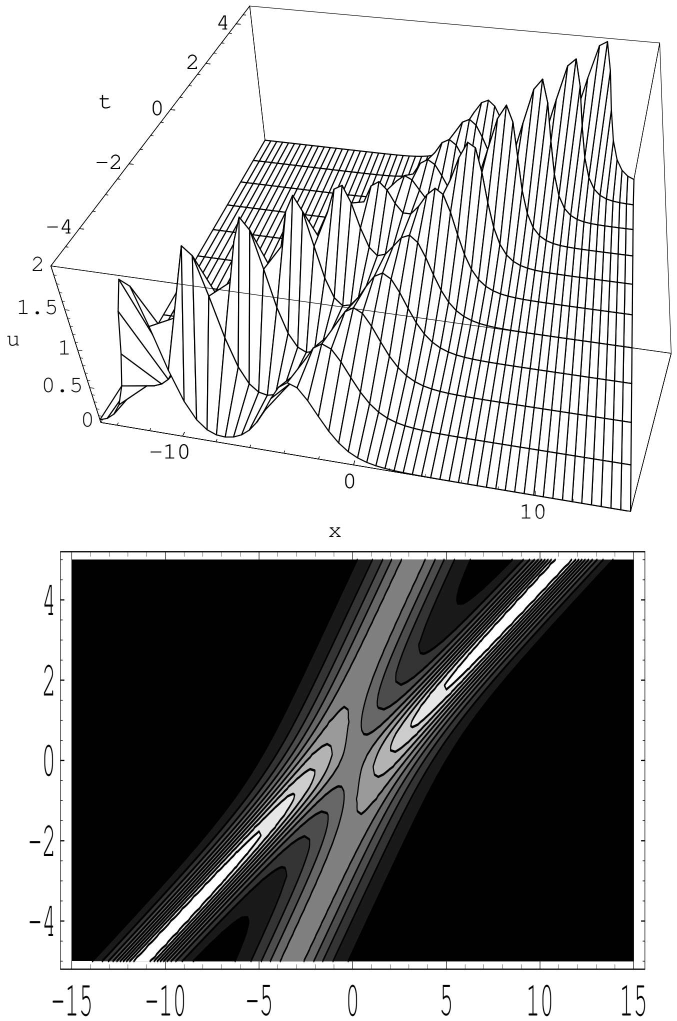
$$u_\pm(x - ct) = 4 \arctan \left(\exp \left(\pm \frac{x - ct}{\sqrt{1 - c^2}} \right) \right) \quad ,$$

gdje se rješenje sa znakom + u eksponentu može smatrati solitonskim (2. tipa u uvodu), dok bi se ono sa negativnim eksponentom moglo nazvati "antisolitonskim". Ova rješenja su grafički prikazana na slikama 5 i 6.

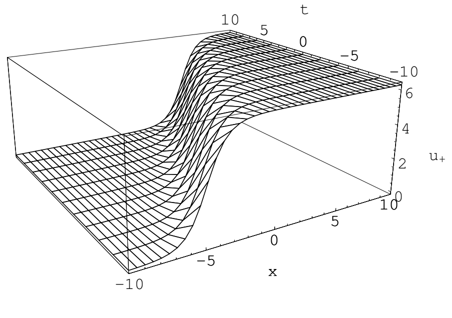
Dubletsko rješenje sinus-Gordonove jednadžbe koje predstavlja soliton-soliton raspršenje je (vidi sliku 7):

$$u_{s-s}(x,t) = 4 \arctan \left(\frac{c \sinh \frac{x}{\sqrt{1-c^2}}}{\cosh \frac{ct}{\sqrt{1-c^2}}} \right) \quad . \tag{6}$$

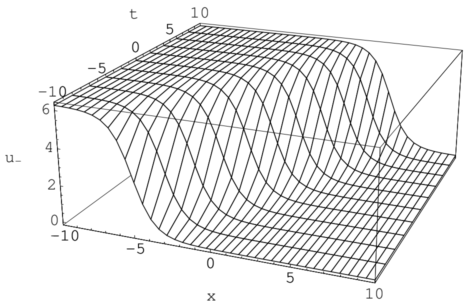
[4] Ova pojava se najbolje može vizuelizirati pomoću animacije koja se, zajedno sa grafičkim prikazom i animacijom tripletskog rješenja, može naći na Internet adresi navedenoj na kraju teksta.



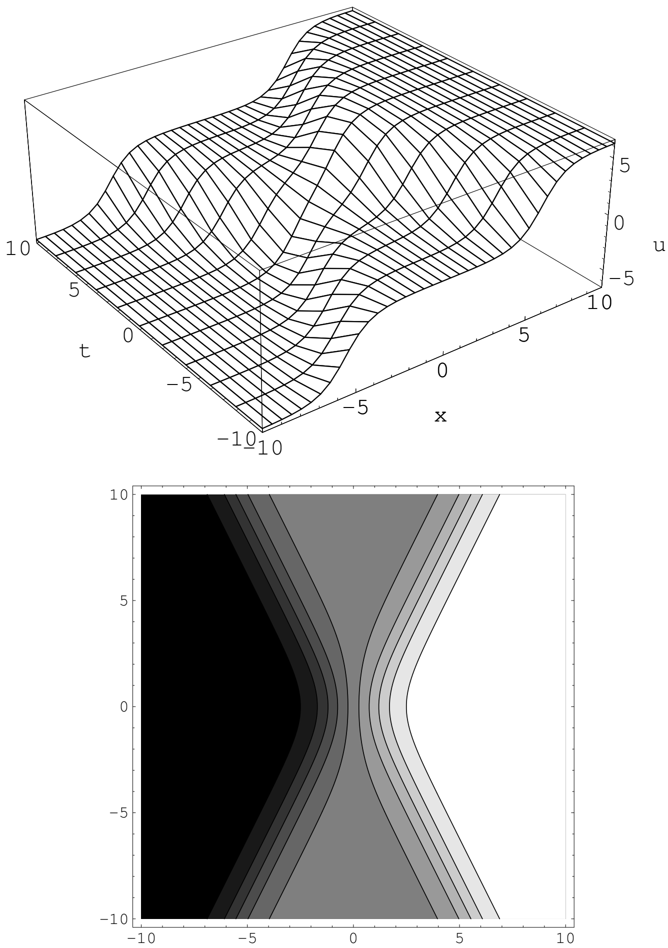
Slika 4: Prostorno-vremenski prikaz dubletskog rješenja KdV jednadžbe ($c_1 = 1$, $c_2 = 2$).



Slika 5: Solitonsko rješenje sinus-Gordonove jednadžbe.



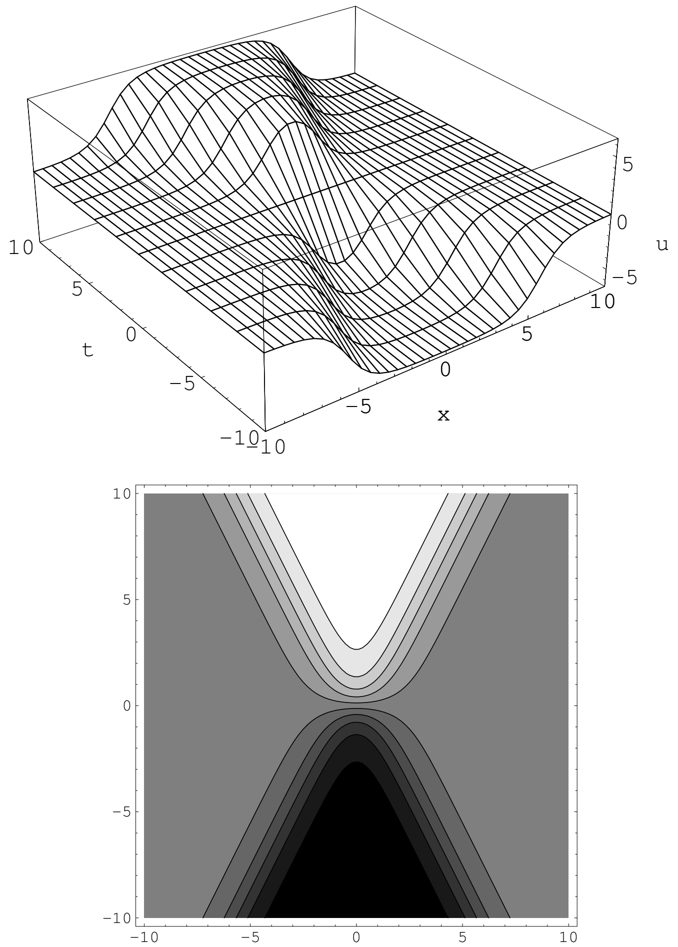
Slika 6: Antisolitonsko rješenje sinus-Gordonove jednadžbe.



Slika 7: Rješenje (6) sinus-Gordonove jednadžbe — raspršenje soliton–soliton

Drugo dubletsko rješenje, koje predstavlja raspršenje solitona i antisolitona je (vidi sliku 8):

$$u_{s-a}(x,t) = 4\arctan\left(\frac{\sinh\frac{ct}{\sqrt{1-c^2}}}{c\cosh\frac{x}{\sqrt{1-c^2}}}\right) \quad . \tag{7}$$



Slika 8: Rješenje (7) sinus-Gordonove jednadžbe — raspršenje soliton–antisoliton

U oba slučaja valovi prolaze jedan kroz drugog bez ikakve promjene oblika.

Sinus-Gordonova jednadžba se primjenjuje u opisivanju sljedećih pojava odn. sistema:

- širenje kristalnih dislokacija

- kretanje Blochovih ploha u magnetskim kristalima

- unitarna teorija elementarnih čestica

5.2 Boussinesq-ova jednadžba

Ova jednadžba glasi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6\frac{\partial^2 (u^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \quad ,$$

a prvobitno je konstruirana za opisivanje valova u plitkoj vodi koji se šire u oba smjera.[5]

Dubletsko rješenje ove jednadžbe u slučaju valova koji se prostiru u istom smjeru ilustriran je na slici 9. Očito je da se ono kvalitativno ponaša slično kao i u KdV slučaju.

Međutim, ono što ova jednadžba nudi više u odnosu na KdV jeste raspršenje dva solitona suprotnih smjerova prostiranja. Ovaj slučaj prikazan je na slici 10.

5.3 Još neke solitonske jednadžbe

Sljedeće solitonske jednadžbe ćemo samo spomenuti po imenu, a za kratak pregled upućujemo na [2, str. 1446-1450]:

- jednadžbe samo-inducirane transparentnosti

- jednadžbe nelinearne rešetke

- nelinearna Scrödingerova jednadžba

- Hirotina jednadžba

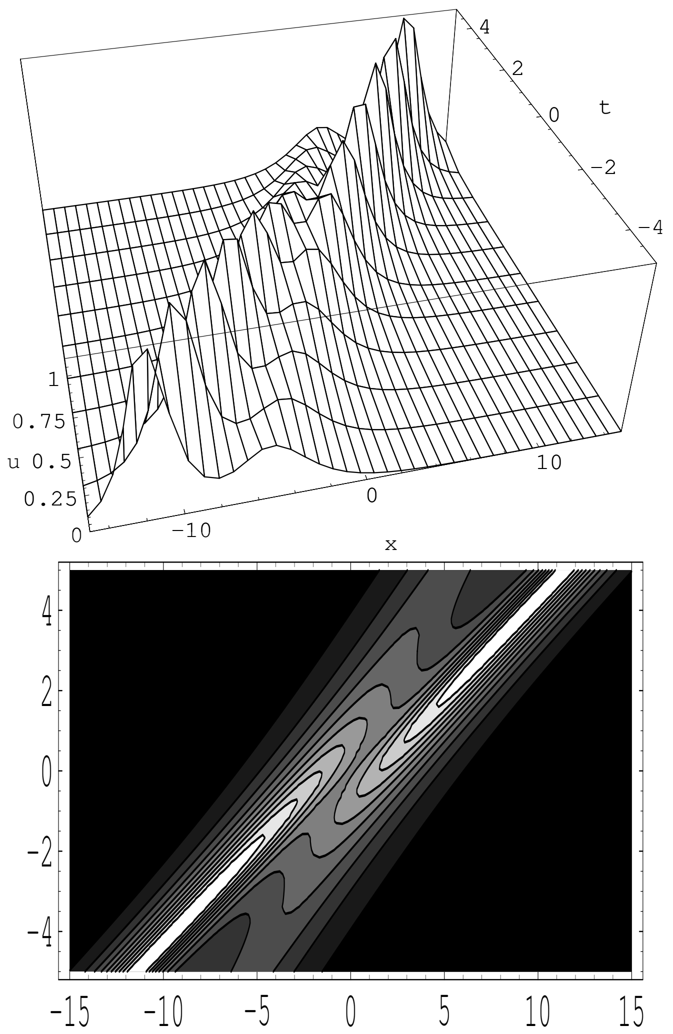
- Born-Infeldova jednadžba

Literatura

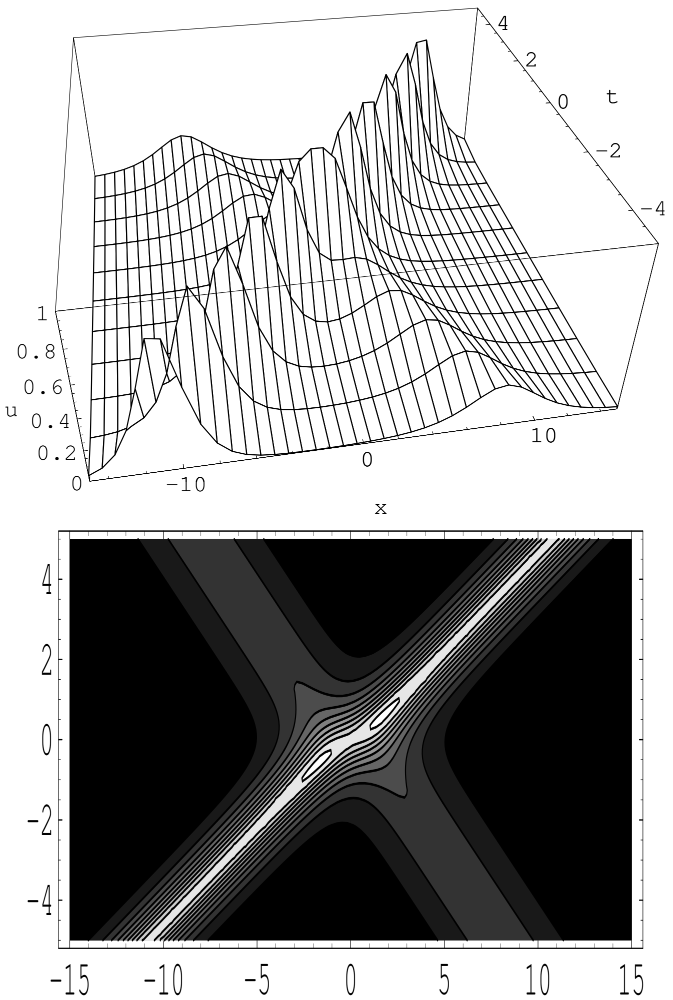
[1] Brauer, K., *Klaus Brauer's SOLITON Page*, `http://www.usf.uni-osnabrueck.de/~kbrauer/solitons.html`; decembar 2003.

[2] Scott, Alwyn C. et al., *The Soliton: A New Concept in Applied Science*, Proceedings of the IEEE, Vol. 61, No. 10, October 1973, p. 1443-1484

[5] Uočiti da rješenja KdV jednadžbe koja smo ranije dobili, zbog korjena brzine vala koji se javlja, imaju smisla samo za pozitivne brzine.



Slika 9: Dubletsko rješenje Boussinesqove jednadžbe za istosmjerne solitone.



Slika 10: Dubletsko rješenje Boussinesqove jednadžbe za solitone suprotnih smjerova.

[3] Vongehr, S. (1997), *Solitons*, `http://physics1.usc.edu/~vongehr/solitons_html/solitons.pdf`; decembar 2003.

[4] Lamb, G. L. Jr., *Elements of Soliton Theory*, John Wiley & Sons, 1980.

[5] Herriot-Watt University, Edinburgh - Department of Mathematics, *Solitons Home Page*, `http://www.ma.hw.ac.uk/solitons/`; decembar 2003.

Opširnije... Ispušteni dijelove izvoda i analitički izrazi grafički prikazanih rješenja, te animacije raspršenja, kao i kompletan *Mathematica* kôd korišten za ovaj članak, mogu se naći na adresi: `http://solitoni.bojan.info`