

Univerzitet u Sarajevu  
Prirodno-matematički fakultet  
Odsjek za fiziku

# Solitonska rješenja Korteweg–de Vries jednačine

DIPLOMSKI RAD

Kandidat:  
Bojan Đuričković

Mentor:  
Prof. dr. Kenan Suruliz

Sarajevo, 29. novembar 2004

## Sažetak

Korteweg–de Vries jednačina je *nelinearna* jednačina, koja je nastala kao model valova na plitkoj vodi, ali je našla primjene i u brojnim drugim granama fizike. Vrlo je tijesna njena povezanost sa Sturm–Liouvilleovim problemom, Schrödingerovim operatorom i inverznim problemom rasijanja. Posebno je interesantna i zbog svojih *solitonskih rješenja*, koja su u ovom radu izvedena analitički za najjednostavnije slučajeve, i analizirana numerički za određene početne uvjete.

## Sadržaj

<b>1 Korteweg–de Vries jednačina</b>	<b>1</b>
1.1 Valovi na plitkoj vodi . . . . .	3
1.2 Sturm–Liouvilleov problem i KdV jednačina . . . . .	12
<b>2 Analitička solitonska rješenja</b>	<b>16</b>
2.1 Rješenje direktnom integracijom . . . . .	16
2.2 Višesolitonska rješenja . . . . .	18
2.2.1 Bargmannovi potencijali . . . . .	19
<b>3 Numerička metoda</b>	<b>24</b>
3.1 Osnova algoritma . . . . .	24
3.2 Numerička rješenja . . . . .	27
3.2.1 Gausijan . . . . .	27
3.2.2 Interakcija dva solitona . . . . .	30
3.2.3 Narušenje linearne superpozicije . . . . .	36
<b>4 Zaključak</b>	<b>40</b>
<b>A Dodaci</b>	<b>41</b>
A.1 Otkriće solitona i KdV jednačine . . . . .	41
A.2 Diskretna Fourierova transformacija . . . . .	42
<b>B Programski kôd</b>	<b>44</b>

# 1 Korteweg–de Vries jednačina

Korteweg–de Vries (KdV) jednačina je jedna od najpoznatijih i najistraženijih nelinearnih disperzivnih jednačina. Nastala kao model valova na plitkoj vodi (§1.1), danas pak važi za *tipičnu jednačinu* u fizici, koja se javlja u raznim oblastima, kao npr. i Sturm–Liouvilleov problem, s kojim je ona blisko povezana (§1.2). Pregled istorijata od otkrića solitona do formulacije KdV jednačine naveden je u dodatku A.1.

KdV jednačina u standardnom obliku glasi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (1.1)$$

Ona je, dakle, nelinearna parcijalna diferencijalna jednačina, trećeg reda po prostornoj koordinati.

**Balans nelinearnosti i disperzije.** Pogledajmo ponaosob prirodu nelinearnog ( $u \partial u / \partial x$ ) i disperzivnog ( $\partial^3 u / \partial x^3$ ) člana u jednačini (1.1):

**Nelinearnost** uzrokuje “lomljenje” valova<sup>1</sup>, što se može vidjeti iz rješenja jednačine

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (1.2)$$

Vrh vala se sužava i prednja strana postaje sve strmija, sve dok ne dođe do lomljenja.

**Disperzija** je u jednačini (1.1) karakterizirana članom sa trećom prostornom derivacijom, i njen efekat je da širi valne pakete, tako da oni gube formu i lokalizaciju.

Pogledajmo, na primjer (linearnu) *Airyjevu jednačinu*:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad (1.3)$$

Pripadna disperzijska relacija je  $\omega = k + k^3$ . Treća derivacija čini da fazna brzina  $v = \omega/k = 1 + k^2$  jako zavisi o valnom broju  $k$ , pa se komponente valnog paketa sa različitim valnim brojevima brzo razilaze.

Treba napomenuti da je član  $\partial^3 u / \partial x^3$  energetski neutralan (nema disipacije niti unošenja energije u sistem).

---

<sup>1</sup> Pojava poznata kada se morski valovi, prije razbijanja o obalu, u plitkoj vodi prelome, tj. kada im vrh “pretekne prednji rub”, te ga gravitacija povuče prema dolje.

Ono po čemu je KdV jednačina značajna, i njena rješenja posebno interesantna, jeste to da se ova dva efekta, *nelinearnost i disperzija tačno kompenzuju*, tako da kod rješenja KdV jednačine nema lomljenja vala, dok valni paketi neograničeno zadržavaju svoju formu (nema disperzije vala). Širenje vala, naime, onemogućava da se razvija vrh koji bi se prelomio, dok, s druge strane, nelinearnost, koja vodi ka tom razvoju vrha vala, sprečava širenje vala — ta dva efekta su u vrlo finoj ravnoteži.

**Kalibracija nelinearnog i disperzivnog člana.** Prije nego što se posvetimo izvođenju KdV jednačine, ukažimo na to da se, osim u obliku (1.1), KdV jednačina može sresti i sa koeficijentima različitim od jedinice. Treba uočiti da je koeficijent (pa i predznak) uz nelinearni član stvar dogovora, jer se transformacijom  $u \mapsto \alpha u$  on može po volji podesiti: jednačina (1.1) tako prelazi u:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (1.4)$$

Često se, pogodnosti radi, KdV jednačina piše sa izborom  $\alpha = 6$  ili  $\alpha = -6$ .

Treba napomenuti da se koeficijent različit od jedinice uz nelinearni član može postići i istovremenom transformacijom prostorne i vremenske koordinate:

$$x \mapsto \gamma x, \quad t \mapsto \gamma^3 t, \quad (1.5)$$

pri čemu KdV jednačina postaje:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \gamma^2 u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (1.6)$$

Tako smo došli do interesantnog zaključka da je *KdV jednačina invarijantna u odnosu na transformaciju*  $x \mapsto \gamma x$ ,  $t \mapsto \gamma^3 t$ ,  $u \mapsto \gamma^{-2} u$ .

Osim kalibracije nelinearnog člana, moguće je mijenjati i koeficijent uz disperzivni član  $\partial^3 u / \partial x^3$  podešavanjem vremenske skale. Lako se provjerava da promjenom skale vremena  $t \mapsto \beta t$ , praćenom transformacijom  $u \mapsto u/\beta$ , jednačina (1.1) postaje:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (1.7)$$

KdV jednačina se nekad sreće i sa malim koeficijentima uz disperzivni član.

## 1.1 Valovi na plitkoj vodi

Krenimo najprije istorijskim putem, i izvedimo KdV jednačinu razmatrajući kretanje ravnih valova na površini tekućine.<sup>2</sup>

Za opisivanje ravnih valova na vodi dovoljne su dvije koordinate – longitudinalna (tj. horizontalna,  $x$ ) i transverzalna (tj. vertikalna,  $y$ ). Treća koordinata je po pretpostavci ciklička, i sistem u tom smjeru posjeduje translacijsku simetriju.

Kretanje tekućine opisano je poljem *vektora brzine*

$$\mathbf{V}(x, y, t) = u(x, y, t) \mathbf{e}_x + v(x, y, t) \mathbf{e}_y. \quad (1.8)$$

Pretpostavićemo da je gustoća fluida  $\rho$  konstantna, tako da se jednačina kontinuiteta:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (1.9)$$

svodi na:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \quad (1.10)$$

Dalje ćemo pretpostaviti da je kretanje fluida irotacijsko,

$$\nabla \times \mathbf{V} = 0, \quad (1.11)$$

pa se polje brzine može izraziti preko *potencijala brzine*  $\phi(x, y, t)$ :

$$\mathbf{V} = \nabla \phi. \quad (1.12)$$

Tako, iz jednačine (1.10), u osnovi problema dobijamo Laplaceovu jednačinu:

$$\nabla^2 \phi = 0. \quad (1.13)$$

**Rubni uvjeti.** Pretpostavljamo da je tekućina odozdo omeđena čvrstim dnom, na kojem postavljamo ishodište vertikalne koordinate,  $y = 0$ . Tako imamo *prvi rubni uvjet*:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, 0) = 0. \quad (1.14)$$

---

<sup>2</sup> Izvod koji slijedi je prema [1, str. 169-174]. U [2, §3.3] je dat alternativni izvod na osnovu istog modela.

Nivo površine vode je opisan *funkcijom elevacije*  $\eta(x, t)$ , koja je sa  $y$ -koordinatom površine povezana relacijom:

$$y = h + \eta(x, t), \quad (1.15)$$

gdje je  $h = \text{const}$  dubina tekućine. Odavde na površini tekućine dobijamo:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{dx}{dt}. \quad (1.16)$$

Kako je, po definiciji vektora brzine (1.8) i potencijala brzine (1.12),

$$\frac{dx}{dt} = u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (1.17a)$$

$$\frac{dy}{dt} = v = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad (1.17b)$$

iz (1.16) dobijamo *drugi rubni uvjet*:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x}. \quad (1.18)$$

Treći rubni uvjet dobijamo iz jednačine kretanja

$$\frac{d(\rho \mathbf{V})}{dt} = -\nabla p - g\rho \mathbf{e}_y, \quad (1.19)$$

gdje je  $p$  pritisak i  $g$  gravitaciono ubrzanje. Pretpostavljamo da je na površini pritisak jednak nuli,  $p = 0$ , pa, dijeleći sa konstantnom gustoćom, na površini tekućine imamo:<sup>3</sup>

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -g \mathbf{e}_y. \quad (1.20)$$

Koristeći identitet:

$$\frac{1}{2} \nabla (V^2) = \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V}) + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V},$$

---

<sup>3</sup> Totalna vremenska derivacija je raspisana:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{V}}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} \\ &= \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \end{aligned}$$

gdje rotacijski član otpada zbog (1.11), dobijamo:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla (V^2) + g \mathbf{e}_y = 0. \quad (1.21)$$

Lako se provjerava da se izraz na lijevoj strani može prikazati kao gradijent izraza  $\partial\phi/\partial t + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + gy$ . Integrirajući (1.21) tako dobijamo *treći rubni uvjet*:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + gy = 0. \quad (1.22)$$

**Eulerove jednačine.** Sistem od Laplaceove jednačine (1.13), zajedno sa dobijena tri rubna uvjeta (1.14), (1.18) i (1.22), predstavlja Eulerove jednačine za valove na neviskoznom, inkompresibilnom fluidu sa irotacijskim tokom u oblasti  $D_\eta = \{(x, y) : 0 \leq y \leq h + \eta(x, t)\}$ . Prepišimo ih ovdje još jednom radi potpunosti:

$$\Delta\phi = 0 \quad 0 \leq y \leq h + \eta \quad (1.23a)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 \quad \text{na } y = 0 \quad (1.23b)$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\eta}{\partial x} \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial y} \quad \text{na } y = h + \eta(x, t) \quad (1.23c)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + gy = 0 \quad \text{na } y = h + \eta(x, t) \quad (1.23d)$$

Izrazimo još, za kasnije potrebe, rubne uvjete (1.23c) i (1.23d) preko komponenti brzine  $u$  i  $v$  umjesto potencijala  $\phi$ . Dok u prvoj od njih odmah prepoznamo ove komponente:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\eta}{\partial x} u = v, \quad (1.23c')$$

drugu treba diferencirati po jednoj koordinati. Prije toga uočimo da je:

$$(\nabla\phi)^2 = u^2 + v^2.$$

Diferenciranjem (1.23d) po  $x$  imamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u^2 + v^2) + g \frac{\partial}{\partial x} (h + \eta) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial\eta}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (1.23d')$$

**Razvoj u red.** Iz sistema jednačina (1.23) ćemo dobiti KdV jednačinu kao aproksimaciju za valove na plitkoj vodi, tj. u slučaju kada je dubina  $h$  mala u odnosu na širinu vala  $l$ . Takođe ćemo smatrati amplitudu vala  $a$  malom u odnosu na dubinu  $h$ . Dakle, dva su mala bezdimenziona parametra:

$$\epsilon = \frac{a}{h}, \quad \delta = \frac{h}{l}, \quad (1.24)$$

po kojima ćemo perturbativno tražiti rješenje.

Kako nas zanimaju samo male vrijednosti  $y$  (jer je  $y \approx h \ll l$ ), potražimo rješenje razvijajući  $\phi$  u red po  $y$ :

$$\phi(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} y^n \phi_n(x, t). \quad (1.25)$$

Uvrštavajući u Laplaceovu jednačinu (1.23a),

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} y^n \phi_n(x, t) = 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{n=0}^{\infty} \left( y^n \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial x^2} + n(n-1) y^{n-2} \phi_n \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{n=0}^{\infty} y^n \left( \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial x^2} + (n+2)(n+1) \phi_{n+2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (1.26)$$

dobija se rekursijska relacija:

$$\phi_{n+2} = -\frac{1}{(n+2)(n+1)} \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial x^2}. \quad (1.27)$$

Rubni uvjet (1.23b) nakon razvoja (1.25) daje:

$$\phi_1 = 0, \quad (1.28)$$

pa uz rekursiju (1.27) dobijamo da su svi neparni članovi razvoja (1.25) jednaki nuli. U redu ostaje:

$$\phi = \phi_0 - \frac{1}{2} y^2 \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2} + \frac{1}{24} y^4 \frac{\partial^4 \phi_0}{\partial x^4} + \dots \quad (1.29)$$

Derivirajući (1.29) po  $x$  odnosno  $y$ , dobivamo razvoje u red komponenti brzine na površini:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = f - \frac{1}{2} y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dots, \quad (1.30a)$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -y \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{6} y^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots, \quad (1.30b)$$



gdje smo označili

$$f(x, t) := \frac{\partial \phi_0}{\partial x}(x, t). \quad (1.31)$$

Ova oznaka će se pokazati zgodnom, jer će se u jednačinama javljati samo derivacija potencijala po  $x$  (i njene derivacije), tako da ćemo pojednostavniti notaciju rješavajući po  $f$  umjesto po potencijalu.

**Linearna aproksimacija.** Prije nego što se pozabavimo redom aproksimacije koji će dati KdV jednačinu, pogledajmo šta se dobija ako isпустimo nelinearne članove u (1.23c') i (1.23d'), i zadržimo samo prve članove u razvojjima (1.30). Rubni uvjeti daju:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = v, \quad (1.32a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (1.32b)$$

pa uz prvi red razvoja, pri čemu još i aproksimiramo  $y \approx h$ :

$$u = f, \quad (1.33a)$$

$$v = -h \frac{\partial f}{\partial x}, \quad (1.33b)$$

dobijamo sistem:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -h \frac{\partial f}{\partial x}, \quad (1.34a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (1.34b)$$

Eliminacijom  $f$  (deriviranjem prve relacije po  $t$  i druge po  $x$ ), vidimo da  $\eta$  zadovoljava *valnu jednačinu*:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \quad (1.35)$$

pri čemu smo uveli

$$c^2 := gh. \quad (1.36)$$

Dakle, u najnižem redu aproksimacije, valovi na površini vode su sinusoidalni,

$$\eta = a \exp i(kx - \omega t), \quad (1.37)$$

gdje je  $\omega = ck$ .<sup>4</sup>

Sada možemo i procijeniti, u linearnoj aproksimaciji, red veličine iznosa komponenti brzina  $u$  i  $v$ , koje ćemo iskoristiti kako bismo uveli bezdimenzionalne veličine. Iz (1.32a) imamo:

$$v = -i\omega\eta \sim -i\frac{c}{\lambda}\eta. \quad (1.38)$$

Ako uzmemo da su dominantne valne dužine reda širine valnog paketa,  $\lambda \approx l$ , za iznos brzine pomaka u vertikalnom smjeru imamo:

$$|v| \sim c\frac{a}{h}\frac{h}{l} = c\epsilon\delta. \quad (1.39)$$

Za horizontalnu brzinu iz (1.32b) imamo:

$$u = -g \int \frac{\partial\eta}{\partial x} dt, \quad (1.40)$$

pa se za ravni val (1.37) dobija:

$$|u| \sim g\frac{k}{\omega}a = \frac{g}{c}a = \underbrace{\frac{gh}{c}}_c \underbrace{\frac{a}{h}}_\epsilon = \epsilon c \quad (1.41)$$

**Bezdimenzionalne veličine.** Izaberimo nove bezdimenzionalne nezavisne varijable  $x'$  i  $t'$ , definisane relacijama:

$$x = lx', \quad (1.42a)$$

$$t = \frac{l}{c}t', \quad (1.42b)$$

a za zavisne varijable, na osnovu prethodnih procjena reda veličine (1.39) i (1.41), uzmimo ovakve  $\eta'$ ,  $u'$  i  $v'$ :

$$\eta = a\eta', \quad (1.42c)$$

$$u = \epsilon c u', \quad (1.42d)$$

$$v = \epsilon\delta c v'. \quad (1.42e)$$

Na osnovu (1.30a), označimo i bezdimenzionalnu veličinu  $f'$  takvu da je:

$$f = \epsilon c f', \quad (1.42f)$$

---

<sup>4</sup> Ili, tačnije,  $\omega^2 = c^2k^2$ . Kako je valna jednačina invarijantna u odnosu na inverziju  $x \rightarrow -x$ , ona posjeduje rješenja koja se kreću na jednu i na drugu stranu, što odgovara pozitivnim i negativnim vrijednostima  $c$ . Kod KdV jednačine ove invarijantnosti više neće biti, i moraćemo se opredijeliti za jedan smjer.

te izrazimo i  $y$ -koordinatu površine kao:

$$y = h(1 + \epsilon\eta'). \quad (1.42g)$$

Izrazimo sada relacije do kojih smo prethodno došli preko novih bezdimenzionalnih veličina. U razvoju komponenti brzina u red (1.30) zadržimo samo članove najnižeg reda po  $\epsilon$  i  $\delta$ :

$$u' = f' - \frac{1}{2}\delta^2 \frac{\partial^2 f'}{\partial x'^2}, \quad (1.43a)$$

$$v' = -(1 + \epsilon\eta') \frac{\partial f'}{\partial x'} + \frac{1}{6}\delta^2 \frac{\partial^3 f'}{\partial x'^3}. \quad (1.43b)$$

Rubni uvjeti (1.23c) i (1.23d) u bezdimenzionalnoj formi postaju:

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t'} + \epsilon \frac{\partial \eta'}{\partial x'} u' = v', \quad (1.44a)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} + \epsilon u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + \epsilon \delta^2 v' \frac{\partial v'}{\partial x'} + \frac{\partial \eta'}{\partial x'} = 0. \quad (1.44b)$$

Uvrštavajući u ove rubne uvjete razvoje (1.43), i zadržavajući opet samo članove najnižeg reda po  $\epsilon$  i  $\delta$ , dobija se:

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t'} + \frac{\partial f'}{\partial x'} + \epsilon \eta' \frac{\partial f'}{\partial x'} + \epsilon f' \frac{\partial \eta'}{\partial x'} - \frac{1}{6}\delta^2 \frac{\partial^3 f'}{\partial x'^3} = 0 \quad (1.45a)$$

$$\frac{\partial f'}{\partial t'} + \frac{\partial \eta'}{\partial x'} + \epsilon f' \frac{\partial f'}{\partial x'} - \frac{1}{2}\delta^2 \frac{\partial^3 f'}{\partial x'^2 \partial t'} = 0 \quad (1.45b)$$

**Perturbacijsko rješenje.** Kao što smo rekli, tražićemo perturbacijsko rješenje po malim veličinama  $\epsilon$  i  $\delta$ .

Potražimo naprije rješenje za  $f'$  u odsutnosti perturbacije. Zanemarujući članove sa  $\epsilon$  i  $\delta$ , (1.45) se svodi na:

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t'} + \frac{\partial f'_0}{\partial x'} = 0 \quad (1.46a)$$

$$\frac{\partial f'_0}{\partial t'} + \frac{\partial \eta'}{\partial x'} = 0 \quad (1.46b)$$

Dakle, za rješenje u nultom redu perturbacije možemo uzeti<sup>5</sup>

$$f'_0 = \eta'. \quad (1.47)$$

---

<sup>5</sup> Ne zanima nas opšte rješenje za  $f'$ , nego nam je cilj da ga eliminišemo kako bismo dobili jednačinu za  $\eta'$ .

Iz (1.46) imamo:

$$\frac{\partial f'_0}{\partial t'} + \frac{\partial f'_0}{\partial x'} = 0. \quad (1.48)$$

*Prvi red perturbacije.* Najniže potencije malih karakterističnih veličina sistema koje se javljaju su  $\epsilon$  i  $\delta^2$ . Uzmimo stoga perturbacijski razvoj:

$$f' = \eta' + \epsilon f^{(1)} + \delta^2 f^{(2)} \quad (1.49)$$

Uvrštavajući ovaj razvoj u (1.45), i zadržavajući samo članove prvog reda po  $\epsilon$  i  $\delta^2$ , dobijamo:

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t'} + \frac{\partial \eta'}{\partial x'} + 2\epsilon \eta' \frac{\partial \eta'}{\partial x'} + \epsilon \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x'} + \delta^2 \frac{\partial f^{(2)}}{\partial x'} - \frac{1}{6} \delta^2 \frac{\partial^3 \eta'}{\partial x'^3} = 0 \quad (1.50a)$$

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t'} + \frac{\partial \eta'}{\partial x'} + \epsilon \eta' \frac{\partial \eta'}{\partial x'} + \epsilon \frac{\partial f^{(1)}}{\partial t'} + \delta^2 \frac{\partial f^{(2)}}{\partial t'} - \frac{1}{2} \delta^2 \frac{\partial^3 \eta'}{\partial^2 x' \partial t'} = 0 \quad (1.50b)$$

Oduzimajući (1.50b) od (1.50a), imamo:

$$\epsilon \eta' \frac{\partial \eta'}{\partial x'} + \epsilon \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x'} - \epsilon \frac{\partial f^{(1)}}{\partial t'} + \delta^2 \frac{\partial f^{(2)}}{\partial x'} - \delta^2 \frac{\partial f^{(2)}}{\partial t'} - \frac{1}{6} \delta^2 \frac{\partial^3 \eta'}{\partial x'^3} + \frac{1}{2} \delta^2 \frac{\partial^3 \eta'}{\partial^2 x' \partial t'} = 0 \quad (1.51)$$

Ako, na osnovu (1.48), aproksimiramo i u prvom redu perturbacije:

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t'} = - \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x'} \quad (1.52a)$$

$$\frac{\partial f^{(2)}}{\partial t'} = - \frac{\partial f^{(2)}}{\partial x'}, \quad (1.52b)$$

relacija (1.51) postaje:

$$\epsilon \left( \eta' \frac{\partial \eta'}{\partial x'} + 2 \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x'} \right) + \delta^2 \left( 2 \frac{\partial f^{(2)}}{\partial x'} - \frac{2}{3} \frac{\partial^3 \eta'}{\partial x'^3} \right) = 0 \quad (1.53)$$

Kako su  $\epsilon$  i  $\delta$  nezavisne veličine, faktori uz  $\epsilon$  i  $\delta^2$  moraju istovremeno da iščezavaju:

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial x'} = - \frac{1}{2} \eta' \frac{\partial \eta'}{\partial x'} \quad (1.54a)$$

$$\frac{\partial f^{(2)}}{\partial x'} = \frac{1}{3} \frac{\partial^3 \eta'}{\partial x'^3}, \quad (1.54b)$$

integrirajući po  $x$  je:

$$f^{(1)} = -\frac{1}{4}(\eta')^2 \quad (1.55a)$$

$$f^{(2)} = \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \eta'}{\partial x'^2}, \quad (1.55b)$$

tako da sada možemo eliminirati  $f^{(1)}$  i  $f^{(2)}$  iz (1.50a):

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t'} + \frac{\partial \eta'}{\partial x'} + \frac{3}{2} \epsilon \eta' \frac{\partial \eta'}{\partial x'} + \frac{1}{6} \delta^2 \frac{\partial^3 \eta'}{\partial x'^3} = 0. \quad (1.56)$$

Eliminirajmo član  $\partial \eta' / \partial x'$  transformacijom:

$$\xi = x' - t' \quad (1.57a)$$

$$\tau = t' \quad (1.57b)$$

Derivacije po starim izražene preko derivacija po novim koordinatama su:

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (1.58a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad (1.58b)$$

tako da (1.56) postaje:

$$\frac{\partial \eta'}{\partial \tau} + \frac{3}{2} \epsilon \eta' \frac{\partial \eta'}{\partial \xi} + \frac{1}{6} \delta^2 \frac{\partial^3 \eta'}{\partial \xi^3} = 0. \quad (1.59)$$

Ova jednačina ima oblik Korteweg–de Vries jednačine. Kako bismo je sveli na oblik (1.1), treba se još samo riješiti koeficijentata uz nelinearni i disperzivni član.<sup>6</sup> To se postiže sljedećim transformacijama:

1. Vremensku varijablu “kontrahiramo” za koeficijent uz disperzivni član

$$\tau' = \frac{1}{\frac{1}{6} \delta^2} \tau \quad (1.60)$$

Time (1.59) postaje:

$$\frac{1}{6} \delta^2 \frac{\partial \eta'}{\partial \tau'} + \frac{3}{2} \epsilon \eta' \frac{\partial \eta'}{\partial \xi} + \frac{1}{6} \delta^2 \frac{\partial^3 \eta'}{\partial \xi^3} = 0. \quad (1.61)$$

---

<sup>6</sup> Ove transformacije su opisane na stranici 2.

2. Dobijenu jednačinu podijelimo sa tim koeficijentom. Dobije se:

$$\frac{\partial \eta'}{\partial \tau'} + \frac{9\epsilon}{\delta^2} \eta' \frac{\partial \eta'}{\partial \xi} + \frac{\partial^3 \eta'}{\partial \xi^3} = 0. \quad (1.62)$$

3. Uvedemo novu zavisnu varijablu, “kontrahiranu” za koeficijent uz nelinearni član:

$$w = \frac{\delta^2}{9\epsilon} \eta' \quad (1.63)$$

Tako smo konačno dobili poznati KdV oblik:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau'} + w \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} = 0 \quad (1.64)$$

## 1.2 Sturm–Liouvilleov problem i KdV jednačina

Osim modeliranjem jednog konkretnog fizikalnog sistema kao što su valovi na plitkoj vodi, do KdV jednačine se, kao što ćemo sada vidjeti, može doći i apstraktnijim razmatranjem.

**Sturm–Liouvilleov problem.** Promotrimo sljedeću jednačinu:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + [\lambda - U(x)] y = 0, \quad a \leq x \leq b, \quad (1.65)$$

koja se može zapisati i operatorski, kako bi se naglasilo da se radi o *problemu svojstvenih vrijednosti*:

$$Ly = \lambda y, \quad (1.66a)$$

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + U(x). \quad (1.66b)$$

Ovo je poseban slučaj *Sturm–Liouvilleove jednačine*, koju prepoznamo kao *vremenski neovisnu Schrödingerovu jednačinu*. Operator  $L$ , definisan relacijom (1.66b), je *Schrödingerov operator*, specijalan slučaj *Sturm–Liouvilleovog operatora*.<sup>7</sup>

Uz jednačinu (1.65), zadaju se i *rubni uvjeti*  $y(a)$  i  $y(b)$ , i oni su za nalaženje rješenja  $y(x)$  jednako važni kao i sama diferencijalna jednačina<sup>8</sup>.

<sup>7</sup> Opšti Sturm–Liouvilleov operator je:  $L = p_0(x) \frac{d^2}{dx^2} + p_1(x) \frac{d}{dx} + p_2(x)$ , gdje su  $p_i(x)$  neke funkcije od  $x$ . U Schrödingerovom slučaju je  $p_0(x) = -1$ ,  $p_1(x) = 0$ , i  $p_2(x) = U(x)$ .

<sup>8</sup> Otud se nekad i govori o *problemu rubnih vrijednosti*.

Za danu funkciju  $U(x)$  (koja u kvantnoj mehanici odgovara *potencijalu*), specificiranjem rubnih uvjeta u tačkama  $x = a$  i  $b$ , jednačina (1.65) općenito ima netrivialna rješenja  $y_j(x)$  samo za određene vrijednosti parametra  $\lambda = \lambda_j$  (*svojstvene vrijednosti*). Pri tome se za netrivialno rješenje  $y_j(x)$  za koje vrijedi  $Ly_j = \lambda_j y_j$  kaže da je svojstvena funkcija Sturm–Liouvilleovog (tj., u našem slučaju, Schrödingerovog) operatora, ili samo *svojstvena funkcija*, dok se skup svih svojstvenih vrijednosti  $\sigma = \{\lambda_j\}$  za dani problem naziva njegovim *spektrom*. Nalaženje ovisnosti rješenja  $y$  o parametru  $\lambda$ , i ovisnosti svojstvenih vrijednosti  $\lambda_j$  o rubnim uslovima, poznato je kao *Sturm–Liouvilleov problem*.

Specijalno, za  $U(x) = 0$ , jednačina (1.65) postaje jednačina harmonijskog oscilatora  $y'' + \lambda y = 0$ . Svojstvene funkcije su sinusoidalne:  $y_j(x) \sim \sin(\sqrt{\lambda_j} x)$ , a spektar  $\sigma = \{\lambda_j\}$  zavisi od rubnih uvjeta. Uzmemo li Dirichletove rubne uvjete,  $y(a) = y(b) = 0$ , dobijamo problem titranja napete žice. Spektar ovakvog sistema je diskretan:  $\lambda_j = \left(\frac{j\pi}{b-a}\right)^2$ ,  $j \in \mathbb{N}$ . Šireći segment  $[a, b]$ , svojstvene vrijednosti se međusobno približavaju, i u granici  $b-a \rightarrow \infty$ , spektar postaje kontinuiran,  $\sigma = \{\lambda \in \mathbb{R}^+\}$ .

Međutim, i u ovoj granici, kada sistem nije prostorno ograničen, moguće je dobiti diskretan spektar i lokalizirane svojstvene funkcije uvođenjem *nehomogenosti*,  $U(x) \neq \text{const}$ . Tako, na primjer, za sistem koji se proteže duž čitave realne osi, kada  $U(x)$  ima oblik potencijalne jame, dio spektra koji odgovara vezanim stanjima će biti diskretan, a svojstvene funkcije  $y_j(x)$  koje odgovaraju ovom dijelu spektra će, iako definisane na čitavoj realnoj osi, biti lokalizirane oko intervala na kojem je  $\lambda \geq U(x)$ .

U daljem razmatranju ćemo se baviti isključivo sistemima koji nisu prostorno ograničeni, tj.  $[a, b] \rightarrow (-\infty, +\infty)$ , tako da će uzrok lokalizacije svojstvenih funkcija uvijek biti nehomogenost sistema, tj. oblik  $U(x)$ . Za rubne uvjete ćemo podrazumijevati da su Dirichletovi,  $y(-\infty) = y(+\infty) = 0$ . Nakon ovih napomena, i gore iznesenog kratkog pregleda Sturm–Liouvilleovog problema, koji je poznat iz raznih oblasti fizike, sada predstoji ključni korak ka KdV jednačini.

**Izospektralne deformacije.** Rješavanju Sturm–Liouvilleovog problema se najčešće pristupa tako da se, za zadane rubne uvjete i za zadanu funkciju  $U(x)$ , rješava problem svojstvenih vrijednosti, tj. traže svojstvene vrijednosti  $\lambda_j$  i njima pripadajuće svojstvene funkcije  $y_j(x)$ . Promotrimo sad stvari iz druge perspektive — zapitajmo se na koji način se izborom funkcije  $U(x)$  može uticati na spektar  $\sigma = \{\lambda_j\}$ , odnosno kako promjena oblika potencijala djeluje na pomake svojstvenih vrijednosti. Potražimo one *transformacije funkcije*  $U(x)$  koje ostavljaju spektar  $\sigma$  *invarijantnim*. Takve transfor-

macije se nazivaju *izospektralnim deformacijama* ili *izospektralnim tokovima* Schrödingerovog operatora.<sup>9</sup>

Parametrizirajmo tražene transformacije funkcije  $U(x)$  uvođenjem parametra  $\alpha$ , tako da je  $U = U(x, \alpha)$ . Jedan očigledan primjer izospektralne deformacije je translacija duž  $x$ -osi,  $U(x + \alpha)$ . Ovaj potencijal zadovoljava diferencijalnu jednačinu  $\partial U / \partial \alpha - \partial U / \partial x = 0$ . Postoje, međutim, i mnogo interesantniji izospektralni tokovi Schrödingerovog operatora, među kojima je upravo i KdV jednačina. Naime, pokazuje se (izvod vidjeti u [1, str. 4-6]) da, ako identificiramo parametar  $\alpha$  sa vremenom, funkcija  $U(x, \alpha) \equiv u(x, t)$  koja je rješenje KdV jednačine (1.1), ostavlja svojstvene vrijednosti invarijantnim — drugim riječima, *KdV jednačina je izospektralna deformacija Schrödingerovog operatora*.<sup>10</sup>

KdV jednačina, međutim, kako je pokazao P. Lax<sup>11</sup>, nije jedina, već tek jedna od beskonačno jednačina koje potencijal mijenjaju na taj način da pri tome svojstvene vrijednosti Schrödingerovog operatora ostaju konstantne. Međutim, druge takve jednačine koje se konstruiraju metodom koju je on dao su višeg reda, i nisu interesantne za fizikalne primjene kao što je to KdV jednačina.

Laxov rad iz 1968. godine (fusnota 11) je posebno značajan jer je u njemu data jedna potpuno nova formulacija problema, pogodna za poopštavanja i plodna za nove rezultate (vidjeti [4, str. 370 ff]). U toj formulaciji se lako dobija rezultat da, za rubne uslove jednake nuli u beskonačnosti, *svaka svojstvena vrijednost  $\lambda$  Sturm–Liouvilleovog problema  $Ly = \lambda y$  predstavlja prvi integral KdV jednačine*. [6, str. 453-454] Na taj način je uspostavljena još tješnja veza između KdV jednačine i Sturm–Liouvilleovog problema: na-

<sup>9</sup> Više o izospektralnim deformacijama u [5].

<sup>10</sup> Napomenimo, međutim, da je ta identifikacija parametra  $\alpha$  sa vremenom čisto formalna, i da  $\alpha$  nema nikakve veze sa eventualnom ulogom vremena u polaznom Sturm–Liouvilleovom problemu. Ovdje smo pošli od vremenski neovisne Schrödingerove jednačine, tako da nema mjesta zabuni. Međutim, u određenom problemu je moguće da je ta vremenski neovisna jednačina dobijena nakon što je vremenska varijabla separirana, i u tom slučaju, kako bi se izbjegla dvostruka uloga vremena, treba izraziti KdV jednačinu preko parametra  $\alpha$  umjesto vremena,

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} + u \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} = 0,$$

radije nego govoriti o vremenski ovisnom potencijalu. U suprotnom, ako bi i svojstvena funkcija ovisila o istom parametru (tj. vremenu) kao i potencijal,  $y = y(x, t)$ , tada ona ne bi zadovoljavala poznatu vremenski ovisnu Schrödingerovu jednačinu, već jednu drugu jednačinu, koja je trećeg reda po prostornoj koordinati [4, str. 372].

<sup>11</sup> LAX, P. D., Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves, *Comm. Pure and Applied Math.* **21** (1968) 467-490.



ime, nije više samo KdV jednačina od značaja za Schrödingerov operator kao njegov izospektralni tok, već i obratno, Sturm–Liouvilleov problem sa Schrödingerovim operatorom je itekako važan za KdV jednačinu, jer su mu pripadne svojstvene vrijednosti integrali kretanja za KdV jednačinu.

## 2 Analitička solitonska rješenja

Kao što smo rekli, KdV jednačina je posebno interesantna zbog svojih solitonskih rješenja. *Solitoni*<sup>12</sup> su lokalizirani poremećaji (valni paketi, pulsevi) koji neograničeno zadržavaju oblik, čak i nakon interakcije sa drugim solitonima.<sup>13</sup>

### 2.1 Rješenje direktnom integracijom

Potražimo rješenje KdV jednačine (1.1) u obliku putujućeg vala  $u(x, t) = w(x - ct)$ . U izvodu ćemo integracijske konstante birati upravo tako da na kraju dobijemo solitonsko rješenje,<sup>14</sup> na osnovu uslova da valna funkcija i sve njene derivacije teže ka nuli u beskonačnosti. Označavajući fazu valne funkcije sa  $\xi = x - ct$ , kako je

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dw}{d\xi}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{dw}{d\xi}, \quad (2.1)$$

sveli smo parcijalnu KdV jednačinu na običnu diferencijalnu jednačinu po varijabli  $\xi$ :

$$(w - c) \frac{dw}{d\xi} + \frac{d^3 w}{d\xi^3} = 0. \quad (2.2)$$

Integrirajući, dobija se:

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} = cw - \frac{w^2}{2}. \quad (2.3)$$

U ovoj jednačini, aditivna konstanta je izjednačena s nulom, kako bi se osiguralo da  $d^2 w/d\xi^2 \rightarrow 0$  uz  $w \rightarrow 0$  za velike  $\xi$ . Množenjem posljednje jednačine sa  $dw/d\xi$  i ponovnim integriranjem dolazi se do:

$$\left( \frac{dw}{d\xi} \right)^2 = cw^2 - \frac{w^3}{3}, \quad (2.4)$$

gdje smo opet, zbog pretpostavke o lokalizaciji, uzeli da  $dw/d\xi \rightarrow 0$  za velike  $\xi$ . Korjenujući ovu jednačinu i još jednom integrirajući, dobija se solitonsko rješenje:

$$w(\xi) = \frac{3c}{\cosh^2(\sqrt{c}\xi/2)}, \quad (2.5)$$

---

<sup>12</sup> Izraz *soliton* je izveden od engleskog *solitary wave* (u prevodu: osamljeni val).

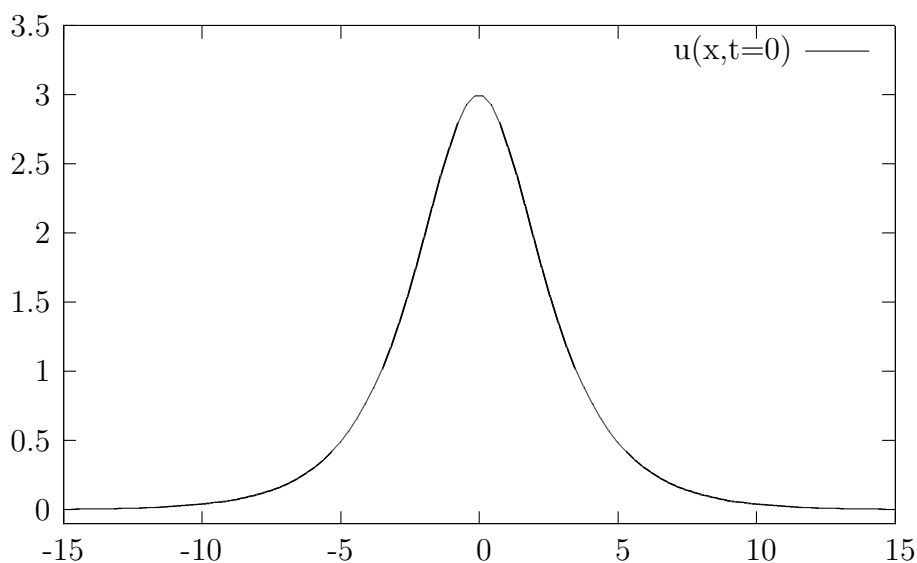
<sup>13</sup> U tom smislu imaju određene odlike čestica, i otud završetak "on" u *soliton*.

<sup>14</sup> Za opšte rješenje u obliku putujućeg vala, kojeg je solitonsko rješenje specijalan slučaj za beskonačan period, vidjeti [1, str. 113 ff].

odnosno:

$$u(x, t) = 3c \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\sqrt{c}}{2} (x - ct) \right). \quad (2.6)$$

Ovo je osnovni oblik solitona, i to je rješenje do kojeg je Boussinesq došao još 1877. godine (vidjeti dodatak A.1).



Slika 1: Osnovni oblik solitona (2.6) za  $c = 1$ .

**Svojstva solitonskog rješenja.** Tri su karakteristične veličine u rješenju (2.6), amplituda ( $3c$ ), širina ( $2/\sqrt{c}$ ) i brzina ( $c$ ) međusobno vezane, i taj soliton pokazuje sljedeća svojstva:

- amplituda je proporcionalna brzini,<sup>15</sup>
- amplituda je obrnuto proporcionalna kvadratu širine vala,
- soliton se kreće u pozitivnom smjeru osi  $x$  (rješenje ima smisla samo za pozitivne brzine).

---

<sup>15</sup> Uočimo da prilikom izvoda (2.6), zbog nelinearnosti, nismo imali izbor amplitude kao integracijske konstante.

Posljednje svojstvo je formalno reprezentirano korjenom brzine u izrazu (2.6), a predstavlja odraz nepostojanja invarijantnosti KdV jednačine u odnosu na vremensku inverziju  $t \mapsto -t$ . U izvodu smo restrikciju na pozitivne brzine prešutno napravili između koraka (2.4) i (2.5).

Kvalitativno, oblik solitona (2.6) podsjeća na gausijan: gladak je, simetričan, sa izraženim maksimumom, i vrlo brzo trne. Međutim, tu sličnost prestaje, jer gausijan ne pokazuje solitonska svojstva. Naime, on ne zadovoljava KdV jednačinu, a ako se uzme rješenje KdV jednačine sa gausijanom kao početnim uslovom, tada se, kao što ćemo numerički vidjeti u §3.2.1, gausijan raspada na niz oblika poput (2.6) različitih amplituda, pri čemu se komponente najveće amplitude najbrže udaljavaju, u skladu sa prvim gore navedenim svojstvom.

## 2.2 Višesolitonska rješenja

Situacije u kojima najviše dolazi do izražaja postojanost solitona jesu interakcije (rasijanja) koje uključuju dva ili više solitona. Tu se, međutim, susrećemo sa matematičkim teškoćama koje su posljedica nelinearnosti. Naime, nije moguće, kao u linearnom slučaju, superponirati niz rješenja solitonskog tipa (2.6), jer *princip linearne superpozicije ne vrijedi* — linearna kombinacija dva rješenja više nije rješenje KdV jednačine. Odstupanje superpozicije dva  $\text{sech}^2$  solitona od rješenja KdV jednačine može se analizirati numerički — ovo je učinjeno u §3.2.2.

Za analitičko nalaženje multipletskih rješenja KdV jednačine spomenućemo dvije metode: metode *Bargmannovih potencijala* i *Bäcklundovog transformata*. Ova prva je u sažetoj formi izložena niže, a za metodu Bäcklundovog transformata recimo samo to da se putem ove transformacije prelazi u prostor gdje se *nelinearnom superpozicijom* mogu kombinovati dva rješenja kako bi dala novo rješenje. Pritom je interesantno da ovaj postupak od dva fizikalno prihvatljiva rješenja može dati neregularno rješenje, a da nelinearna superpozicija regularnog i neregularnog (divergentnog) rješenja može dati regularno rješenje.<sup>16</sup>

---

<sup>16</sup> Nalaženje dvosolitonskog rješenja KdV jednačine pomoću Bäcklundovog transformata izloženo je u BRAUER, K., *The Korteweg–de Vries Equation: History, Exact Solutions and Graphical Representation* (2000), <http://www.usf.uni-osnabrueck.de/~kbrauer/solitons/KdV.pdf>.

### 2.2.1 Bargmannovi potencijali

Vratimo se na Schrödingerovu jednačinu (1.65), i napišimo svojstvenu vrijednost  $\lambda$  u obliku  $\lambda = k^2$ :

$$y'' + (k^2 - u)y = 0. \quad (2.7)$$

Bargmannova metoda se bazira na pretpostavci da postoje potencijali  $u$  za ovu jednačinu takvi da se rješenje može napisati u obliku:

$$y = e^{ikx} F(k, x), \quad (2.8)$$

gdje je  $F(k, x)$  polinom po  $k$ .<sup>17</sup>

**Linearni Bargmannov potencijal.** Prije nego što pođemo Bargmannovim putem u potrazi za višesolitonskim rješenjima, pogledajmo šta se ovom metodom dobija kada je  $F(k, x)$  linearan po  $k$ . Uočimo da je za  $F(k, x)$  koji je nultog reda po  $k$  i neovisan o  $x$ , rješenje (2.8) ravni val, pa se (2.7) svodi na valnu jednačinu, tj. potencijal  $u$  je trivijalan:  $u = 0$ .

Pođimo od  $F(k, x)$  u obliku:

$$F(k, x) = 2k + ia(x), \quad (2.9)$$

gdje smo koeficijente odabrali pogodnosti radi. Uvrstimo li odgovarajuće rješenje (2.8) u jednačinu (2.7), imamo:

$$-2k(a' + u) + i(a'' - au) = 0, \quad (2.10)$$

pa, izjednačavajući faktore uz pojedine potencije od  $k$  s nulom,

$$a' = -u, \quad (2.11a)$$

$$a'' = ua, \quad (2.11b)$$

i eliminacijom  $u$ , dobijamo relaciju

$$a'' = -aa', \quad (2.12)$$

odakle integrirajući imamo:

$$a' + \frac{1}{2}a^2 = 2\mu^2, \quad (2.13)$$

---

<sup>17</sup> U ovom odjeljku slijedimo [1, §1.3].

gdje je  $2\mu^2$  integracijska konstanta (odabrana zbog pogodnosti). Supstitucija logaritamske derivacije,

$$a = \frac{2w'}{w}, \quad (2.14)$$

dovodi do linearne jednačine:

$$w'' - \mu^2 w = 0, \quad (2.15)$$

čije je rješenje:

$$w = \alpha e^{\mu x} + \beta e^{-\mu x}. \quad (2.16)$$

Vraćajući se nazad na  $u$  preko (2.14) i (2.11a), dobijamo:

$$u = -2\mu^2 \operatorname{sech}^2(\mu x - \phi), \quad (2.17)$$

gdje je  $\phi = \frac{1}{2} \ln(\beta/\alpha)$ .

Rezultat se već naslućuje: pokazaće se da potencijal (2.17) odgovara solitonskom rješenju (2.6). Kako bismo ovu identifikaciju sproveli do kraja, iz jednačimo koeficijente uz  $x$ , i izrazimo integracijsku konstantu  $\mu$  preko brzine  $c$ :

$$\mu = \frac{\sqrt{c}}{2}. \quad (2.18)$$

Uvrštavajući ovaj izraz za  $\mu$  u (2.17),

$$u = -\frac{c}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}x - \phi\right), \quad (2.19)$$

vidimo da se koeficijent potencijala  $-c/2$  ne podudara sa onim za solitonsko rješenje (2.6),  $3c$ . Oblik KdV jednačine koju će naš potencijal  $u$  ovdje zadovoljavati dobija se iz (1.1) transformacijom  $u \mapsto -6u$ , dakle (vidjeti str. 2):

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (2.20)$$

Sve do sad nismo uzimali u obzir vremensku ovisnost. Kako bismo učinili da dobiveni potencijal predstavlja rješenje KdV jednačine (2.20), dozvolićemo da integracione konstante  $\alpha$  i  $\beta$  ovise o vremenu, dakle  $\phi = \phi(t)$ . Tada se, uvrštavanjem (2.17) u (2.20) dobija:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\sqrt{c^3}}{2} \Rightarrow \phi(t) = \frac{\sqrt{c}}{2} ct, \quad (2.21)$$

te konačno dobijamo rješenje za potencijal:

$$u(x, t) = -\frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\sqrt{c}}{2} (x - ct) \right). \quad (2.22)$$

Dakle, izuzev razlike u kalibraciji, Bargmannovom metodom smo dobili isto solitonsko rješenje kao i ono koje se dobija direktnom integracijom. U ovom izvodu se faktor  $-6$  uz nelinearni član prirodno javlja, te se zato nekad za standardni oblik KdV jednačine uzima upravo taj, kao što smo i ukazali na str. 2.

Napomenimo još da smo do sada funkcije poput (2.22) oslovljavali sa “solitonska rješenja”, međutim, u kontekstu Schrödingerove jednačine, taj se potencijal zove *Eckartovim potencijalom*.

**Kvadratni Bargmannov potencijal.** Pogledajmo sada slučaj kada je  $F(k, x)$  u (2.8) kvadratni polinom po  $k$ . U ovom dijelu ćemo tek u kratkim crtama naznačiti put u izvodu<sup>18</sup> i navesti rezultate.

Uzmimo  $F(k, x)$  u obliku:

$$F(k, x) = 4k^2 + 2ika(x) + b(x). \quad (2.23)$$

Uvrštavanjem odgovarajućeg rješenja (2.8) u Schrödingerovu jednačinu (2.7), izjednačavanjem potencije od  $k$  sa nulom dobijamo tri relacije:

$$u = -a', \quad ua = a'' + b', \quad ub = b''. \quad (2.24)$$

Supstitucijom  $a = 2w'/w$  dobijamo za  $w$  linearnu diferencijalnu jednačinu četvrtog reda sa konstantnim koeficijentima, čije je rješenje:

$$w = \sigma (\alpha e^{\rho x} + \alpha^{-1} e^{-\rho x}) + \rho (\beta e^{\sigma x} + \beta^{-1} e^{-\sigma x}), \quad (2.25)$$

gdje su  $\rho$  i  $\sigma$  konstante ( $\rho > \sigma > 0$ ), a  $\alpha$  i  $\beta$  integracijske konstante koje ćemo kasnije pustiti da ovise o vremenu. Ovo rješenje može se zapisati i u obliku:

$$w = 2 [\sigma \cosh (\rho x - \phi) + \rho \cosh (\sigma x - \psi)], \quad (2.26)$$

gdje su  $\exp(-\phi) = \alpha$  i  $\exp(-\psi) = \beta$ . Vraćajući unazad supstituciju za  $a$  imamo:

$$a = 2 \frac{w'}{w} = 2\rho\sigma \frac{\sinh (\rho x - \phi) + \sinh (\sigma x - \psi)}{\sigma \cosh (\rho x - \phi) + \rho \cosh (\sigma x - \psi)}. \quad (2.27)$$

---

<sup>18</sup> Izvod je prema [1, str. 9 ff].

Uvođenjem novih konstanti  $p$ ,  $q$ ,  $\theta$  i  $\chi$  takvih da je:

$$\rho = p + q, \quad \sigma = p - q, \quad \phi = \theta + \chi, \quad \psi = \theta - \chi, \quad (2.28)$$

gornji izraz za  $a$  se može pisati:

$$a = 2 \frac{p^2 - q^2}{p \coth \zeta - q \tanh \eta}, \quad (2.29)$$

pri čemu je  $\zeta = px - \theta$  i  $\eta = qx - \chi$ . Za potencijal se onda dobija:

$$u = -a' = -2(p^2 - q^2) \frac{p^2 \operatorname{csch}^2 \zeta + q^2 \operatorname{sech}^2 \eta}{(p \coth \zeta - q \tanh \eta)^2}. \quad (2.30)$$

Ovdje su u  $\zeta$  i  $\eta$  sadržane integracijske konstante  $\alpha$  i  $\beta$ , dakle sada treba naći njihovu vremensku ovisnost uvrštavajući u KdV jednačinu (2.20). Tu je račun pozamašan, pa ćemo samo navesti krajnji rezultat za potencijal:

$$u = -2(c_1 - c_2) \frac{c_1 \operatorname{csch}^2 \left( \frac{\sqrt{c_1}}{2}(x - c_1 t) \right) + c_2 \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\sqrt{c_2}}{2}(x - c_2 t) \right)}{\left[ \sqrt{c_2} \coth \left( \frac{\sqrt{c_1}}{2}(x - c_1 t) \right) - \sqrt{c_2} \tanh \left( \frac{\sqrt{c_2}}{2}(x - c_2 t) \right) \right]^2}, \quad (2.31)$$

gdje su  $c_1$  i  $c_2$  nove konstante,  $p = \sqrt{c_1}/2$ ,  $q = \sqrt{c_2}/2$ .

Dobiveni potencijal (2.31) predstavlja *dvosolitonско rješenje KdV jednačine*. Iako ova karakterizacija nije očigledna iz gornjeg izraza, ona je jasna sa grafičkog prikaza ove funkcije na slici 2.

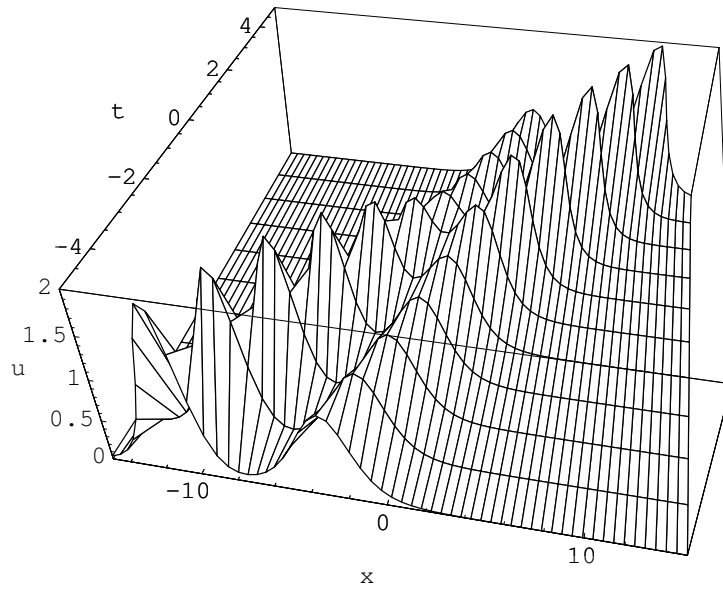
Osim toga, može se pokazati da izraz (2.31) asimptotski teži ka dva solitona oblika  $\operatorname{sech}^2$  kada su oni beskonačno razmaknuti. Tako princip linearne superpozicije za dva solitona vrijedi asimptotski, kada su oni beskonačno udaljeni, a kada su blizu dolazi do nelinearne superpozicije i njihova egzaktna forma je opisana gornjim izrazom. Taj nelinearni efekat kada su dva solitona blizu se očituje u *faznom pomaku*, koji se najjasnije vidi na konturnom grafikonu 3. Veći soliton je u toku samog sudara doživljava pomak prema naprijed, a manji pomak prema unazad.<sup>19</sup>

**Multipleti višeg reda.** Ako uporedimo dvosolitonски izraz (2.31) sa solitonским izrazom (2.6), primjećujemo da se analitička forma prilično usložnila. Već u sljedećem koraku, izraz za trosolitonско rješenje je toliko složen da je potrebno gotovo pola lista A4 papira da se zapiše.<sup>20</sup> Ove teškoće koje nelinearnost uzrokuje u analitičkom rješavanju su nas dovele do sljedećeg poglavlja.

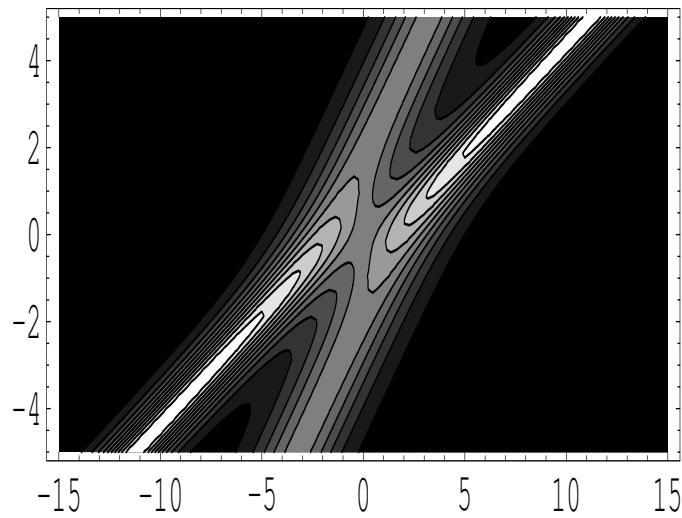
<sup>19</sup> Na ovo se može gledati i kao da su veći i manji soliton u trenutku interakcije zamijenili uloge — kao da je manji val narastao i ubrzao se, a veći se smanjio i usporio.

<sup>20</sup> Puni izraz trosolitonskog rješenja, izračunat u Mathematici metodom Bäcklundovog transformata, može se naći u članku K. Brauera (fusnota 16).





Slika 2: Prostorno-vremenski prikaz egzaktnog dvosolitonskog rješenja (2.31) ( $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 2$ ).



Slika 3: Konturni prikaz egzaktnog dvosolitonskog rješenja (2.31) ( $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 2$ ). Apscisa predstavlja prostornu koordinatu, ordinata vremensku, a vrijednost funkcije je predstavljena bojom, pri čemu su crna odgovara nuli, a bijela maksimumu.

### 3 Numerička metoda

Kao što smo na primjerima vidjeli, izuzev u najjednostavnijim slučajevima, analitičko rješavanje KdV jednačine, kao što to uostalom važi i za nelinearne jednačine općenito, toliko je složeno da osnovni alat u istraživanju rješenja predstavljaju numeričke metode. U ovom dijelu ćemo, slijedeći [2], iznijeti osnovu za implicitnu spektralnu metodu, i prikazati dobijena rješenja. Eksplicitna metoda nije prikladna za KdV jednačinu, jer, zbog treće derivacije, zahtijeva vrlo mali vremenski korak ( $\Delta t = \mathcal{O}(\Delta x^3)$ ), što uzrokuje akumulaciju greške. Spektralna metoda, uobičajena kod disperzivnih jednačina, će se implementirati FFT-om (*Fast Fourier Transform*) [8, §12.2].

#### 3.1 Osnova algoritma

Označimo operator prostornog deriviranja  $D = \partial/\partial x$ . KdV jednačinu zapišimo u sljedećoj formi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -D^3 u - D \left( \frac{u^2}{2} \right). \quad (3.1)$$

**Vremenska diskretizacija.** Integrirajmo ovu jednačinu po vremenu od  $t$  do  $t + \Delta t$ :

$$u(x, t + \Delta t) - u(x, t) = - \int_t^{t+\Delta t} \left( D^3 u + D \left( \frac{u^2}{2} \right) \right) dt, \quad (3.2)$$

i aproksimirajmo integral pomoću pravila trapeza:

$$\begin{aligned} u(x, t + \Delta t) - u(x, t) = \\ - \frac{\left[ D^3 u(x, t + \Delta t) + D \left( \frac{u^2(x, t + \Delta t)}{2} \right) \right] + \left[ D^3 u(x, t) + D \left( \frac{u^2(x, t)}{2} \right) \right]}{2} \Delta t \end{aligned} \quad (3.3)$$

Rearanžirajući dobijamo:

$$\begin{aligned} \left( I + \frac{1}{2} \Delta t D^3 \right) u(x, t + \Delta t) = \\ \left( I - \frac{1}{2} \Delta t D^3 \right) u(x, t) - \frac{1}{4} \Delta t D (u^2(x, t + \Delta t) + u^2(x, t)) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Označimo li simbolički:

$$U := \frac{I - \frac{1}{2}\Delta t D^3}{I + \frac{1}{2}\Delta t D^3} \quad (3.5a)$$

$$B := -\frac{\frac{1}{4}\Delta t D}{I + \frac{1}{2}\Delta t D^3}, \quad (3.5b)$$

možemo pisati:

$$u(x, t + \Delta t) = Uu(x, t) + B(u^2(x, t + \Delta t) + u^2(x, t)) \quad (3.6)$$

Djelovanje operatora  $U$  i  $B$  se najlakše računa u  $k$ -prostoru (na Fourierovim transformatima), gdje se, zbog toga što Fourierov transformat dijagonalizira operator diferenciranja, sve diferencijalne jednačine svode na algebarske. Operator diferenciranja se u  $k$ -prostoru svodi na množenje sa  $-ik$ ,<sup>21</sup>

$$Dq(k) = -ikq(k), \quad (3.7)$$

U  $k$ -prostoru,  $U$  i  $B$  tako postaju:

$$U = \frac{1 - \frac{1}{2}ik^3\Delta t}{1 + \frac{1}{2}ik^3\Delta t} \quad (3.8a)$$

$$B = \frac{\frac{1}{4}ik\Delta t}{1 + \frac{1}{2}ik^3\Delta t}, \quad (3.8b)$$

Prebacimo li jednačinu (3.6) u  $k$ -prostor, imamo, uz oznaku  $q := \mathcal{F}(u)$ :

$$q(k, t + \Delta t) = Uq(k, t) + B\mathcal{F}(u^2(x, t + \Delta t) + u^2(x, t)) \quad (3.9)$$

Nelinearni dio ( $u^2$ ) se lakše računa u  $x$ -prostoru (tu se vrši množenje tačku po tačku), pa ćemo tako izračunate kvadrate prebaciti u  $k$ -prostor, gdje se onda množe sa skalarnim  $B$  (3.8b), kao što se i  $q(k, t)$  množi sa skalarnim  $U$  iz (3.8a).

**Iterativno rješavanje implicitne jednačine.** Jednačina (3.9) je *implicitna* — nije riješena po vrijednostima u vremenskom koraku  $t + \Delta t$ . Taj korak ćemo iz koraka  $t$  dobiti iterativnim rješavanjem jednačine:

$$q_{j+1}(k, t + \Delta t) = Uq_j(k, t) + B\mathcal{F}(u_j^2(x, t + \Delta t) + u_j^2(x, t)) \quad (3.10)$$

---

<sup>21</sup> Predznak ovog faktora zavisi o konvenciji u definiciji Fourierove transformacije. Navedeni predznak odgovara transformacijama (A.11). Sattinger ([2], [3]) koristi drugu konvenciju, dok se ovdje odabrana podudara sa izborom u *Numerical Recipes* [8, §12].

Pokazalo se da ovaj postupak brzo konvergira, i da je dovoljno učiniti svega par iteracija (u implementaciji će se ići do četvrte iteracije).

Radi boljeg razumijevanja implementacije ovog postupka, napišimo (3.10) u sažetom obliku (ispuštena podrazumijevana ovisnost o  $x$ ) kao:

$$\begin{aligned} u_{j+1}(t + \Delta t) &= \mathcal{F}^{-1}U\mathcal{F}u(t) + \mathcal{F}^{-1}B\mathcal{F}(u_j^2(t + \Delta t) + u^2(t)) \\ &= \mathcal{F}^{-1}U\mathcal{F}u(t) + \mathcal{F}^{-1}B\mathcal{F}(u^2(t)) + \mathcal{F}^{-1}B\mathcal{F}(u_j^2(t + \Delta t)) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Označimo li dio koji predstavlja vrijednosti u koraku  $t$  (prva dva člana), tj. onaj dio koji se u iteraciji ne mijenja, sa:

$$v := \mathcal{F}^{-1}U\mathcal{F}u(t) + \mathcal{F}^{-1}B\mathcal{F}(u^2(t)), \quad (3.12)$$

algoritam je kako slijedi:

$$u_0 = u(t)$$

za  $j = 0, 1, \dots, j_{\max}$ :

$$u_{j+1} = v + \mathcal{F}^{-1}B\mathcal{F}(u_j^2)$$

$$u(t + \Delta t) \approx u_{j_{\max}}$$

**Prostorna diskretizacija.** Zbog spomenutih svojstava Fourierove transformacije u odnosu na prostorne derivacije, vidimo da smo u prethodnom izlaganju numeričke šeme došli do algoritma za numeričko rješavanje polazne diferencijalne jednačine, a da uopšte nije bilo potrebe razmatrati prostornu diskretizaciju. Sve derivacije su izračunate u  $k$ -prostoru, a kada se koristila Fourierova transformacija nije bilo precizirano da li se radi o diskretnoj (dodatak A.2) ili o kontinuiranoj Fourierovoj transformaciji. Svi prethodni zaključci, dakle, jednako važe za kontinuiranu funkciju prostora  $u(x)$  uz (kontinuirani) Fourierov transformat, kao i kada se  $u$  ograniči na diskretne vrijednosti  $u_j$  zadate u ekvidistantnim tačkama  $x_j$ , uz diskretni Fourierov transformat. Jedini ograničavajući faktor kod konačne Fourierove transformacije jeste da funkcija  $u$  mora biti ograničena na prostorni interval  $[0, 2\pi]$ .<sup>22</sup>

*Podešavanje širine intervala.* Ovaj ograničavajući faktor u numeričkoj šemi predstavlja izvjestan problem. Naime, da bi se soliton dovoljno lokalizirao na tom intervalu kako bi se mogao proučavati njegov razvoj ili interakcija dva odvojena solitona, amplituda pritom toliko naraste (amplituda je obrnuto

---

<sup>22</sup> Ili se, ekvivalentno,  $u$  može gledati kao periodičko produženje takve funkcije.

proporcionalna kvadratu širine vala, vidjeti str. 17) da to uzrokuje nestabilnost u numeričkoj šemi, i zahtijeva vrlo male vremenske korake. Rješenje ovog problema se sastoji u tome da se interval proširi na  $[0, L]$ . To se postiže definisanjem nove zavisne varijable:

$$y(x, t) = \frac{1}{a} u(ax, t), \quad a = \frac{L}{2\pi}. \quad (3.13)$$

Jednačina pri toj transformaciji prelazi u:

$$\frac{\partial y}{\partial t} + y \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{1}{a^3} \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0, \quad (3.14)$$

što u gore razrađenom numeričkom algoritmu odgovara zamjeni:

$$D^3 \mapsto \frac{1}{a^3} D^3. \quad (3.15)$$

## 3.2 Numerička rješenja

Algoritam opisan u §3.1 implementiran je u programskom jeziku C, i listing tog programa u cjelini naveden je na kraju ovog rada (§B).<sup>23</sup> U ovom dijelu ćemo prikazati rješenja dobijena pomoću tog programa za različite početne uvjete.

### 3.2.1 Gausijan

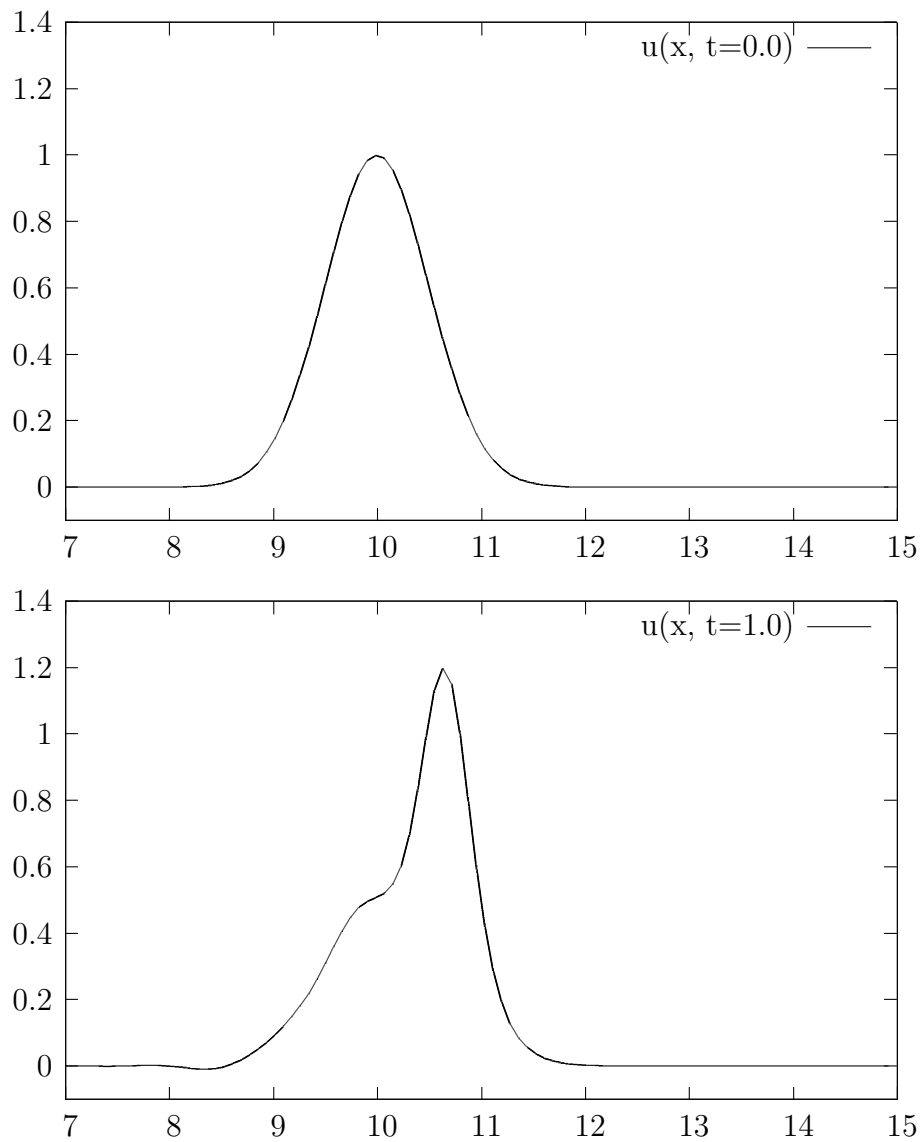
Prvi slučaj koji ćemo numerički analizirati jeste početni uslov u obliku gausijana. Na slikama 4-7 prikazan je razvoj KdV sistema sa početnim uslovom:

$$u(x, t = 0) = e^{-2(x-10)^2}, \quad (3.16)$$

koji je dobijen sa sljedećim vrijednostima parametara:

```
#define START(x)      ( exp(-2*(x-.25*L)*(x-.25*L)) / A )
#define N            1024 /* broj prostornih celija */
#define L            40.0 /* duzina prostornog intervala */
#define DT           .005 /* vremenski korak */
#define DISP         .01 /* koeficijent disperzije */
#define XMIN         7.0 /* min. apscise */
```

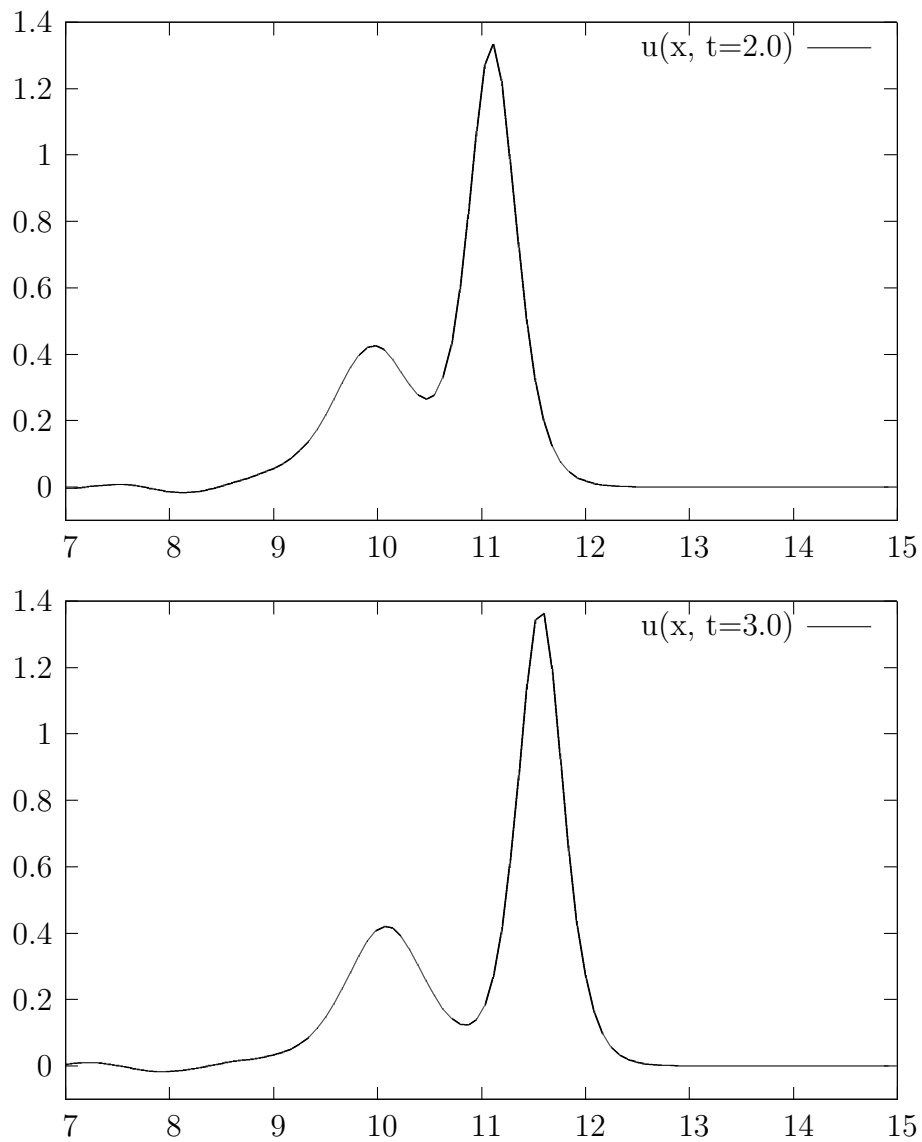
<sup>23</sup> Program ne poziva nikakve vanjske funkcije, jedino zahtijeva kompajler po standardu C99 radi implementacije kompleksnih brojeva. Izvorni kôd je dostupan na adresi <http://bojan.info/diplomski/num/kdv.c>.



Slika 4: Raspad gausijana na solitone (1)

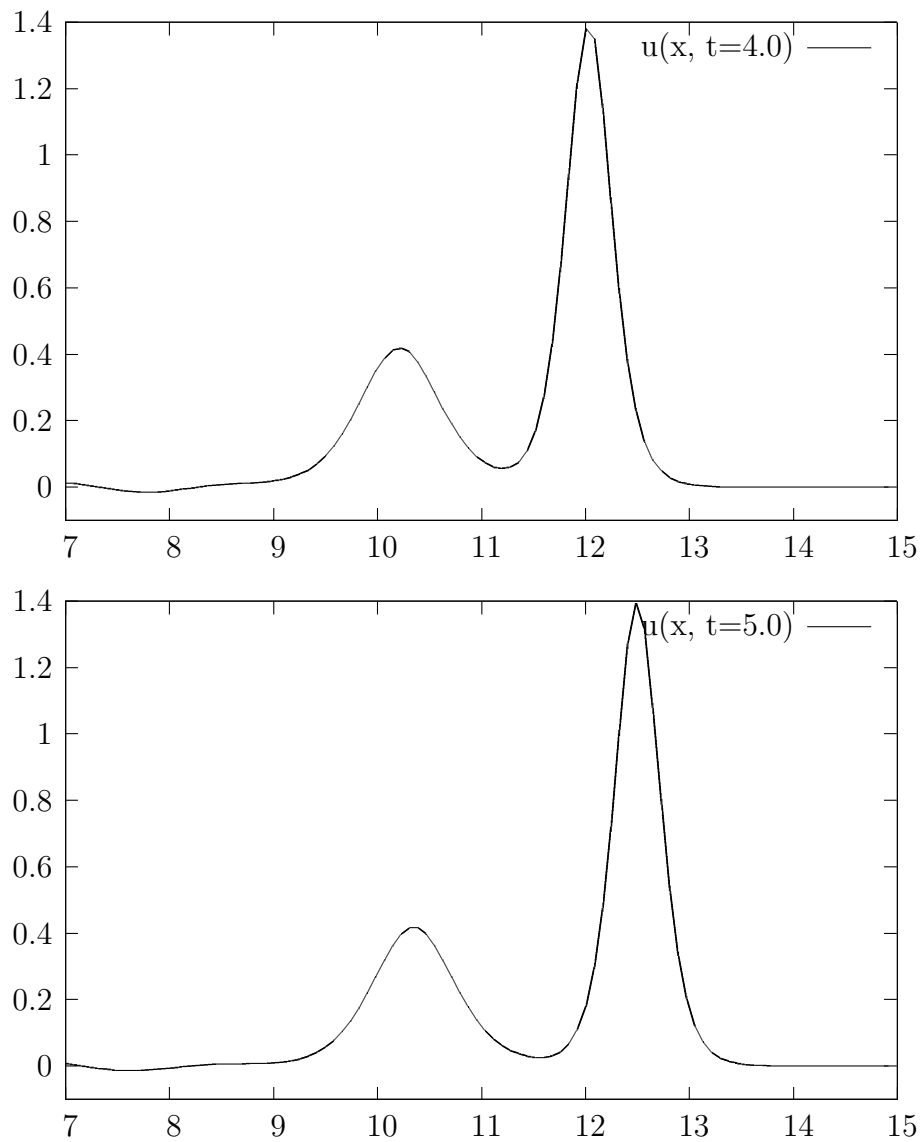
```
#define XMAX      15.0 /* max. apscise */
#define YMIN      -.1 /* min. ordinate */
#define YMAX      1.4 /* max. ordinate */
```

Kao što se vidi, gausijan se brzo raspada na solitone, od kojih su dva dominantna, a ostali, vrlo malih amplituda, se ne daju razabrati. Od dva izražena



Slika 5: Raspad gausijana na solitone (2)

solitona, jedan je gotovo tri puta veće amplitude od drugog, i, u skladu sa ukazanim svojstvom da su solitoni veće amplitude brži od onih manjih, znatno se brže udaljava od početnog položaja  $x = 10$  nego onaj drugi.

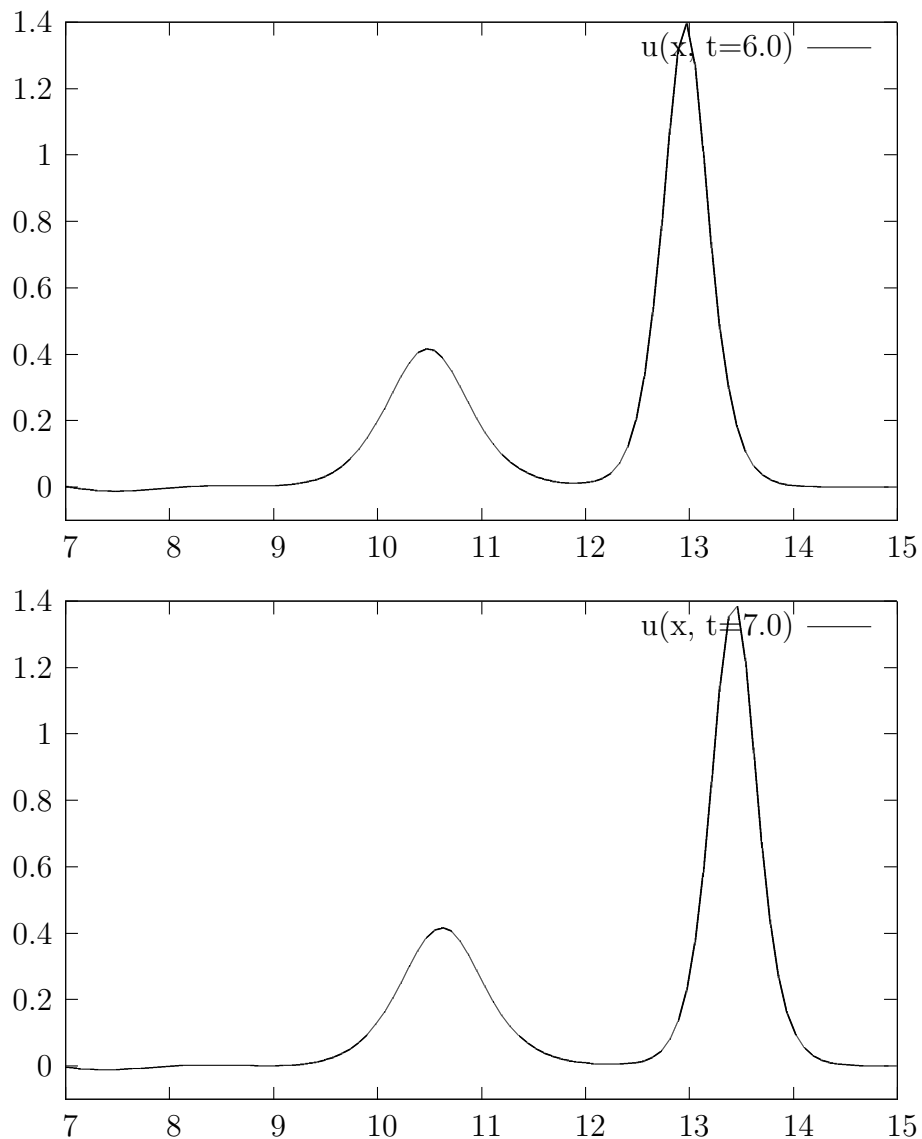


Slika 6: Raspad gausijana na solitone (3)

### 3.2.2 Interakcija dva solitona

Pogledajmo šta se dešava prilikom rasijanja dva solitona oblika (2.6). Na slikama 8-11, prikazana je interakcija u kojoj su kao početni uslov bila superponirana dva takva solitona sa brzinama  $c_1 = 0,64$  odn.  $c_2 = 0,25$ , čija





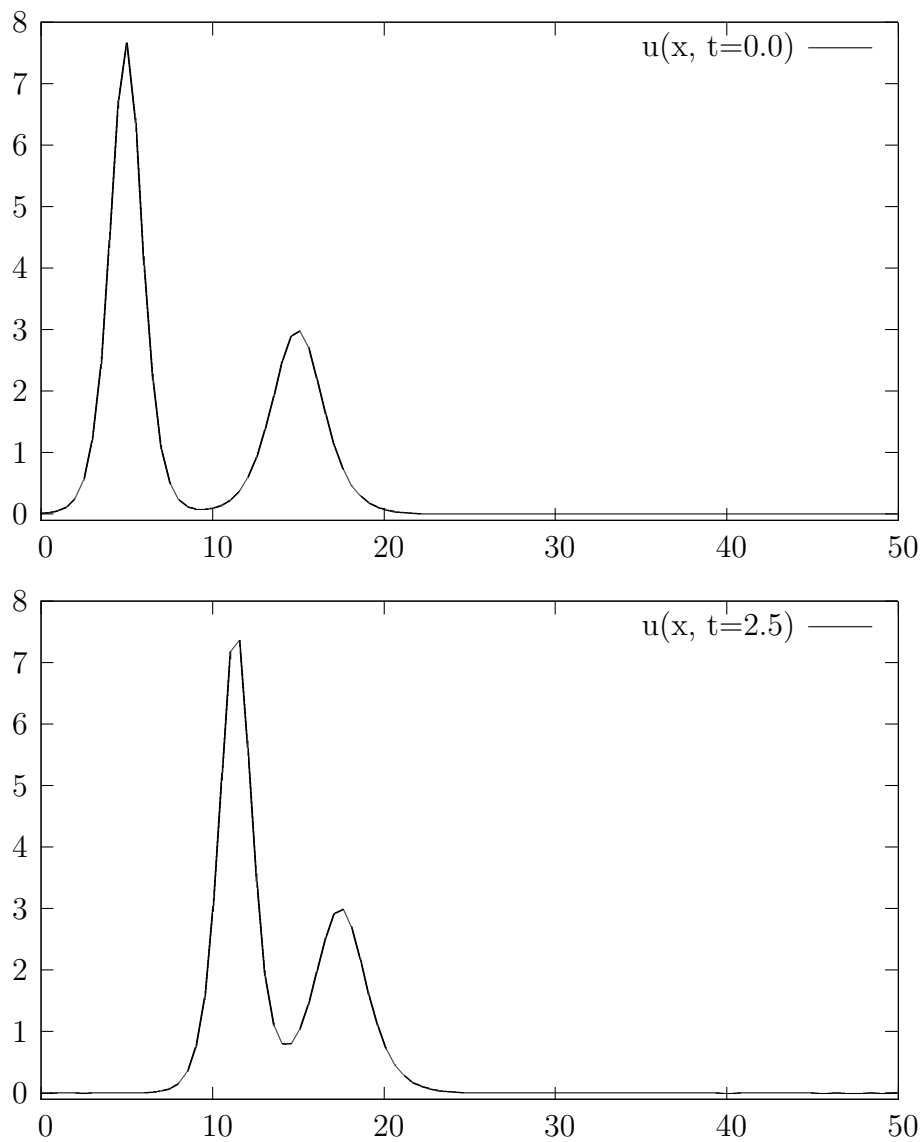
Slika 7: Raspad gausijana na solitone (4)

su se središta u početnom trenutku nalazila na  $x_1 = 5$  odn.  $x_2 = 15$ :

$$u(x, t = 0) = 3c_1 \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\sqrt{c_1}}{2}(x - x_1) \right) + 3c_2 \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\sqrt{c_2}}{2}(x - x_2) \right) . \quad (3.17)$$

Parametri u programu bili su sljedeći:

```
#define START(x) 12/A*(.64/(cosh(.8*(x-5))*cosh(.8*(x-5)))\
```

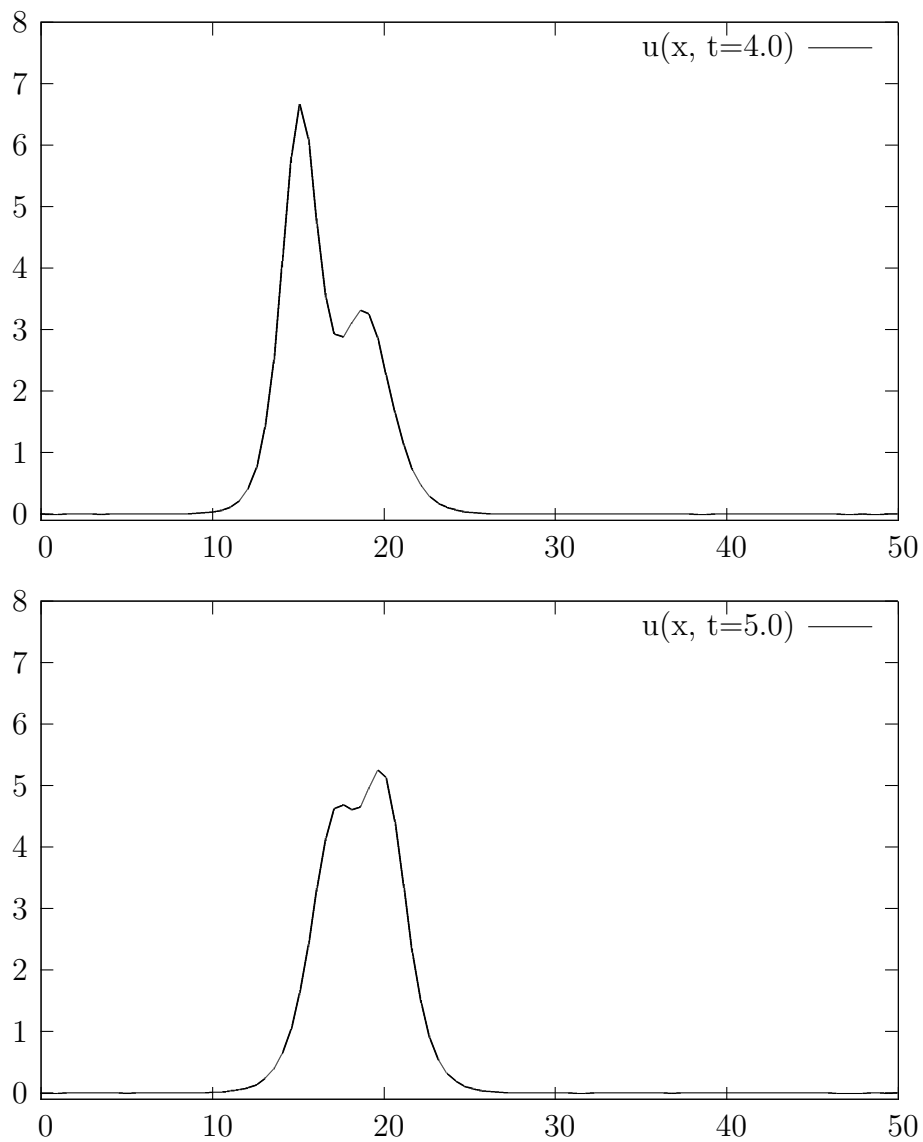


Slika 8: Sudar dva solitona (1)

```

+ .25/(cosh(.5*(x-15))*cosh(.5*(x-15)))
#define N      1024 /* broj prostornih celija */
#define L      50.0 /* duzina prostornog intervala */
#define DT     .005 /* vremenski korak */
#define DISP   1.0 /* koeficijent disperzije */
#define XMIN   0.0 /* min. apscise */

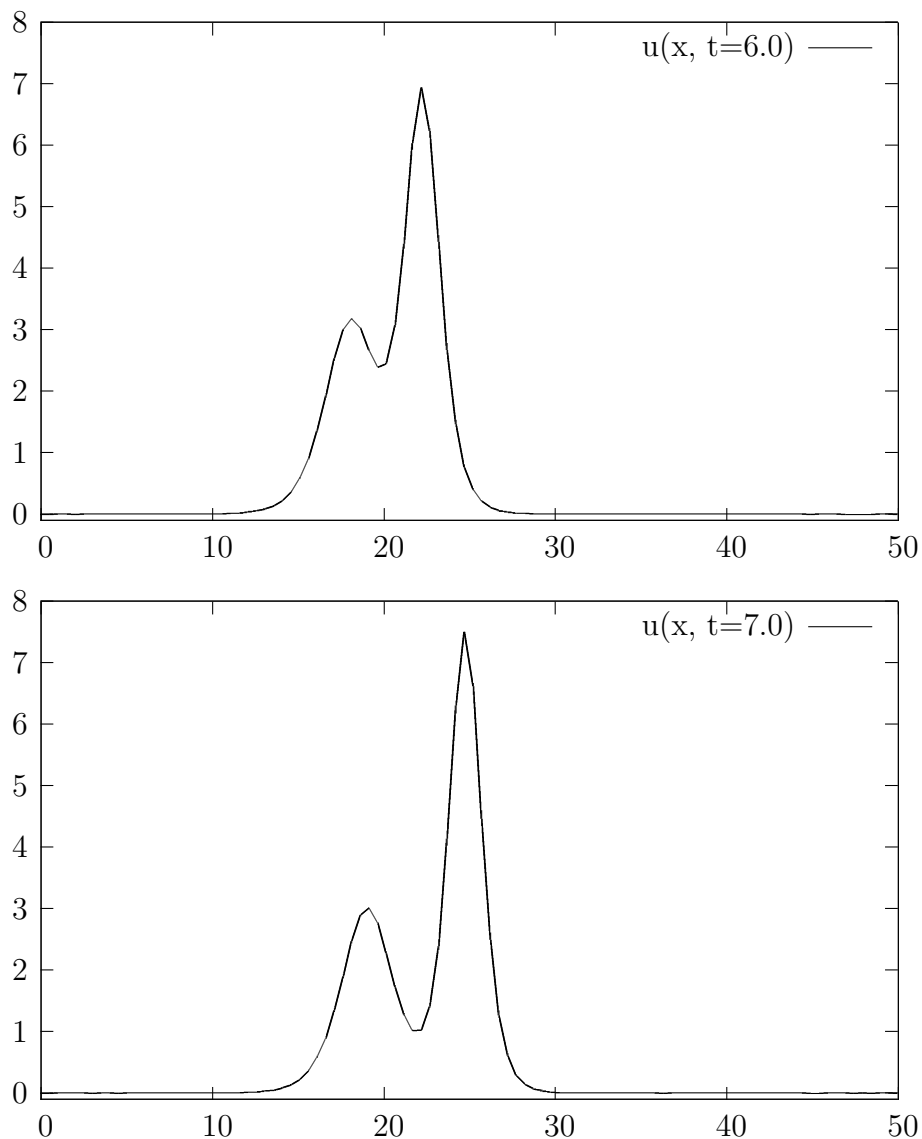
```



Slika 9: Sudar dva solitona (2)

```
#define XMAX    50.0 /* max. apscise */
#define YMIN    -.1 /* min. ordinate */
#define YMAX    8.0 /* max. ordinate */
```

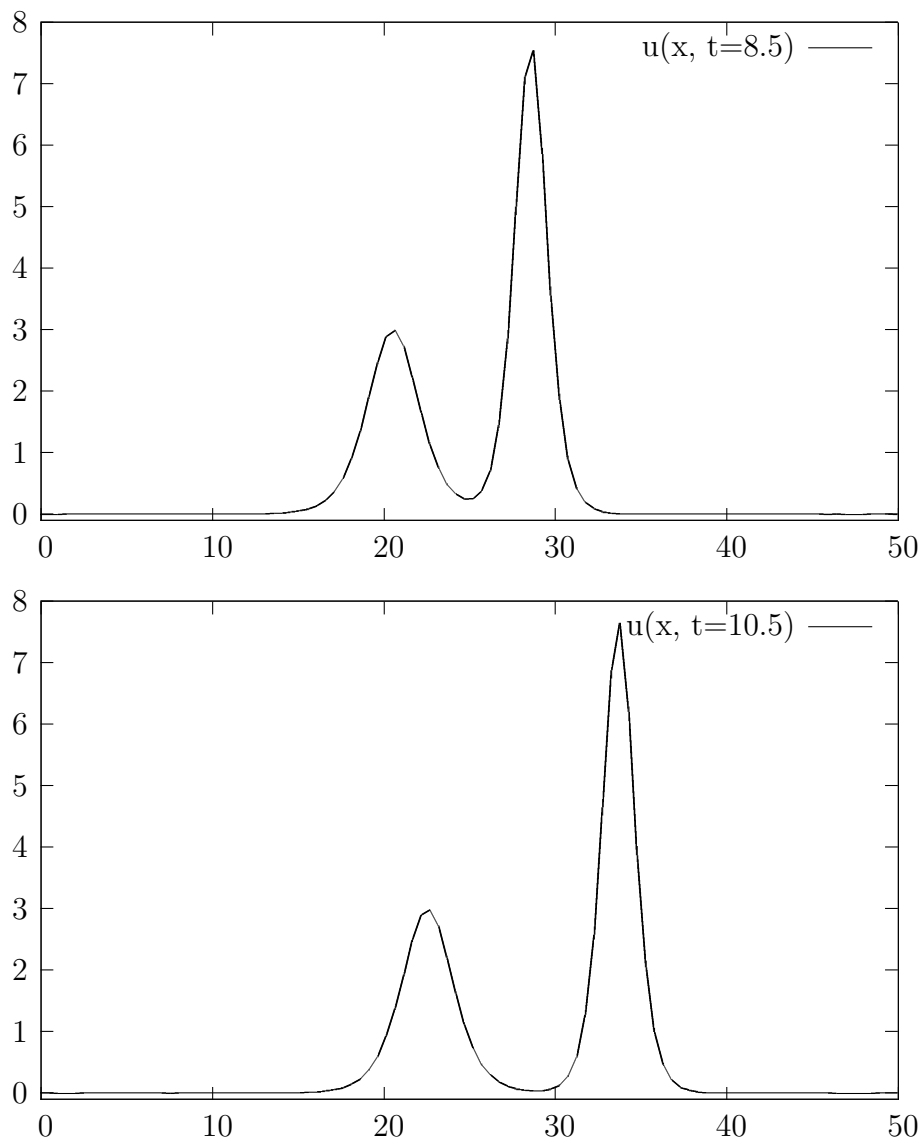
Ovdje je interesantan je sâm trenutak sudara, kada nelinearnost najviše dolazi do izražaja, i dolazi do pomaka u fazi, koji se očituje u sedlu na



Slika 10: Sudar dva solitona (3)

slikama 9. Detaljnijim razmatranjem u finijoj vremenskoj rezoluciji, uočava se da ovo sedlo ni u jednom trenutku ne nestaje, što je potvrda faznog pomaka ukazanog u analizi egzaktnog rješenja (2.31).

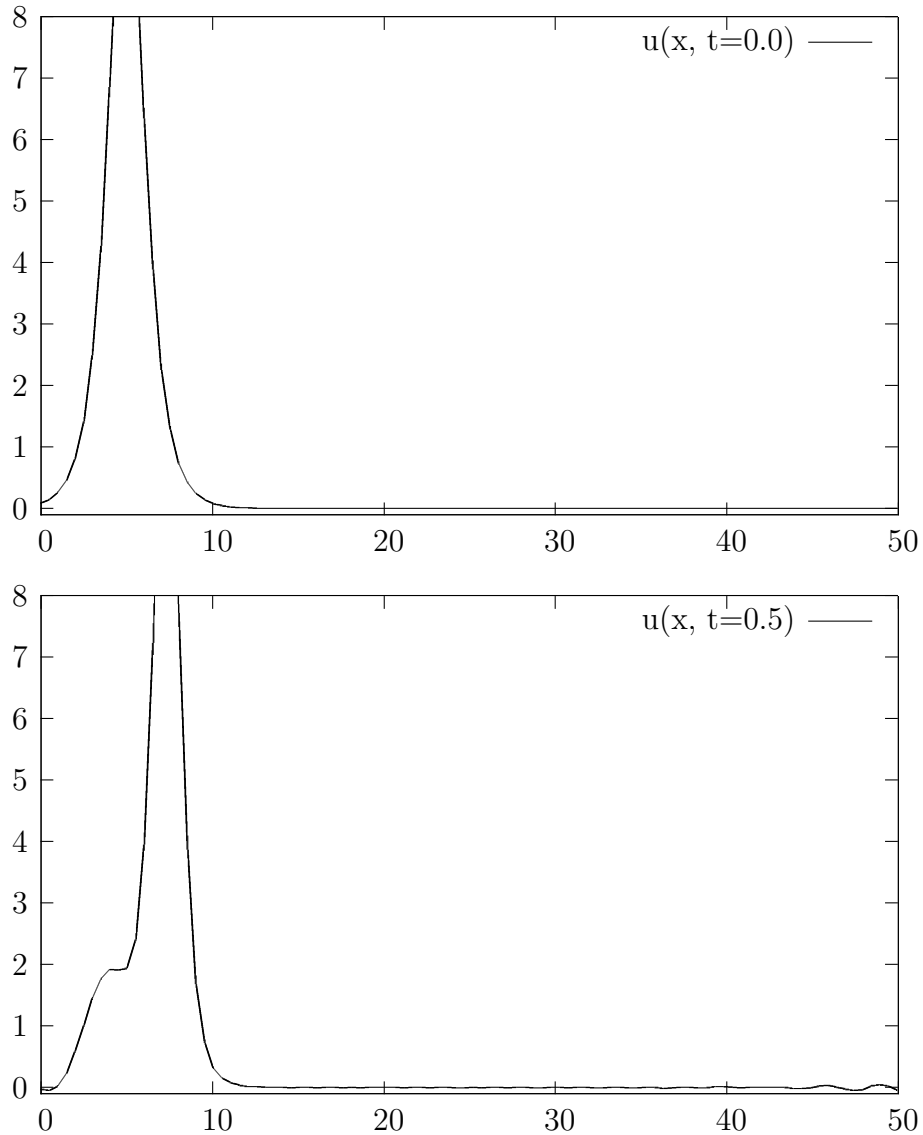
Inače, razlika između ove superpozicije dva solitona i dvosolitonskog rješenja se na ovim graficima teško može uočiti. Ta razlika bi se očitovala u javljanju dodatnih solitonskih paketa malih amplituda u toku vremena,



Slika 11: Sudar dva solitona (4)

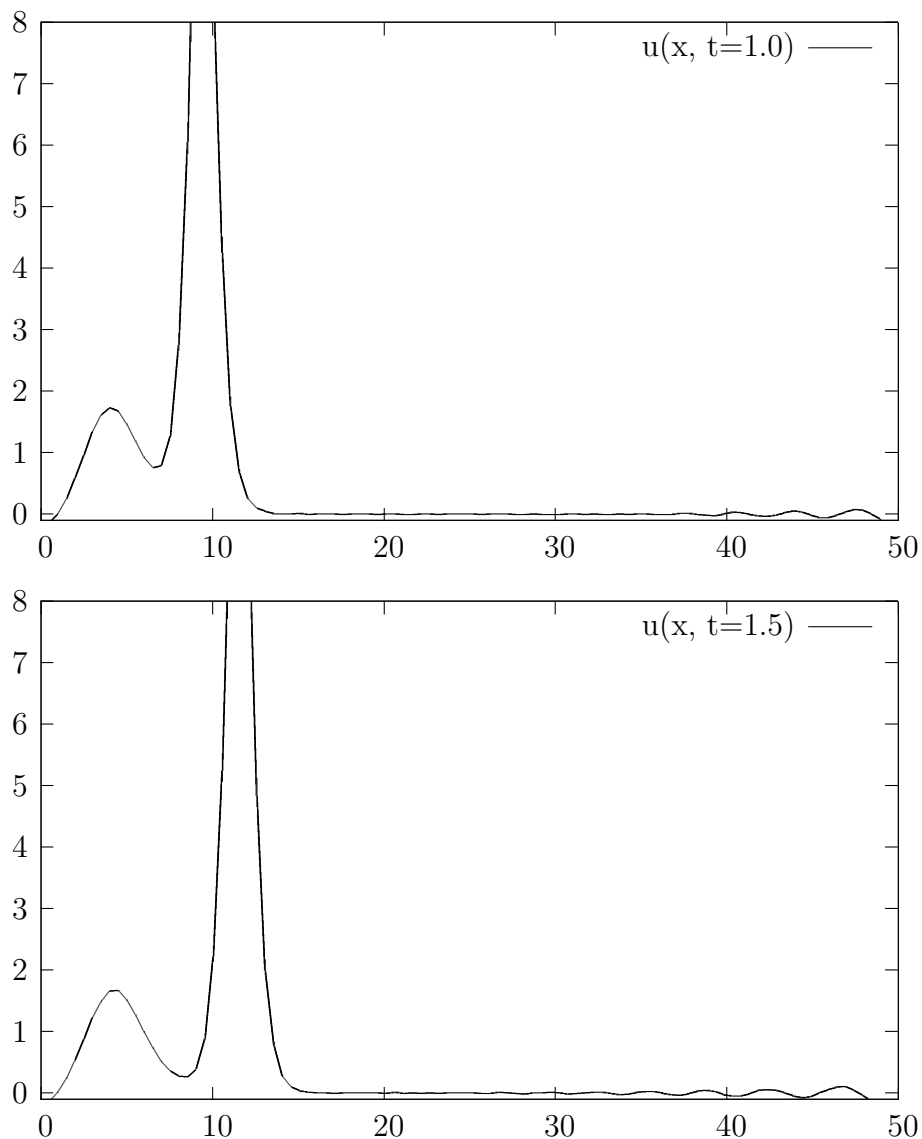
međutim, na skali koja je data, to se ne primjećuje, već su dva solitona i nakon sudara jedini vidljivi poremećaji. Obrazloženje možemo tražiti u tome da izraz (2.31) vrlo brzo teži linearnoj superpoziciji dva solitona tipa (2.6). U ovom primjeru, u početnom trenutku, dva su solitonska paketa, iako relativno blizu jedan drugom, jasno odvojeni.

### 3.2.3 Narušenje linearne superpozicije



Slika 12: Narušenje linearne superpozicije (1)

Na tragu prethodnog primjera, izvedimo sljedeći numerički eksperiment. Superponirajmo dva solitona (3.17) tako da se oni u početnom trenutku preklapaju, dakle uzimamo  $x_1 = x_2$ . Dok su u prethodnom slučaju dva solitona bila u početnom trenutku toliko razmaknuta da se moglo govoriti o približnoj linearnoj superpoziciji, sada ćemo testirati narušenje linearne

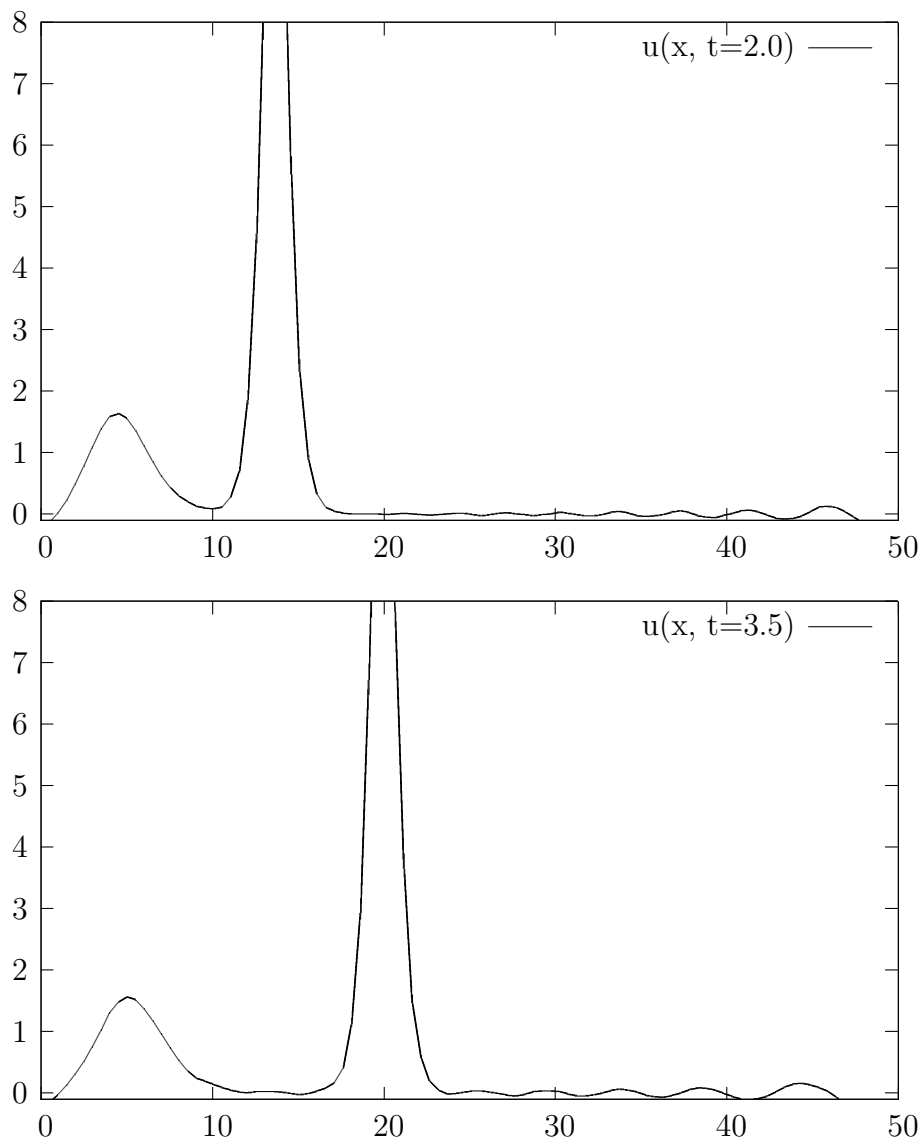


Slika 13: Narušenje linearne superpozicije (2)

superpozicije tamo gdje bi ono trebalo biti najizraženije — u trenutku interakcije dva solitona, kada nelinearnost postiže svoj vrhunac.

Parametri u programu su isti kao i u prethodnom primjeru, osim početnog uvjeta, koji je:

```
#define START(x) 12/A*(.64/(cosh(.8*(x-5))*cosh(.8*(x-5)))\
+ .25/(cosh(.5*(x-5))*cosh(.5*(x-5))))
```

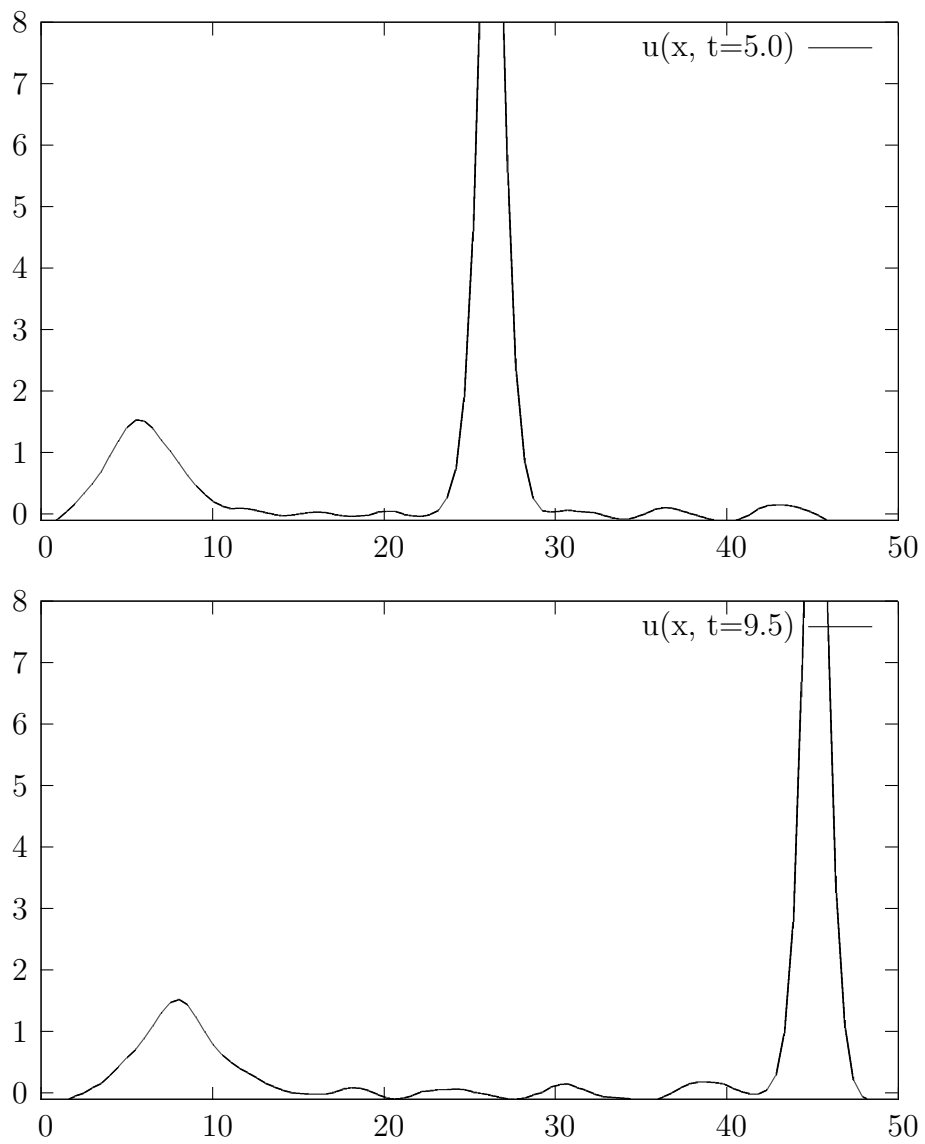


Slika 14: Narušenje linearne superpozicije (3)

Skalu ordinate smo svjesno ostavili istom iako će ovi početni uvjeti “probiti plafon”, kako bismo bolje uočili nelinearne efekte i kako bi rezultati bili direktno uporedivi sa prethodnim primjerom.

Rezultati su prikazani na slikama 12-15. Kao što se jasno vidi, očekivanja su zaista ispunjena, i nelinearnost se manifestuje u brojnim poremećajima





Slika 15: Narušenje linearne superpozicije (4)

pored dva početna solitona.

## 4 Zaključak

Korteweg–de Vries jednačina je *nelinearna disperzivna* parcijalna diferencijalna jednačina, i kod nje se nelinearnost i disperzija kompenzuju, tako da njena rješenja, iako u disperzivnom sistemu, ne pokazuju disperziju (širenje vala).

KdV jednačina se sreće u raznim obastima fizike, i ovdje smo ukazali na njen izvod na dvije sasvim nevezane osnove (valovi na plitkoj vodi, Sturm–Liouvilleov problem).

Među rješenjima KdV jednačine, ograničili smo se na proučavanje *solitonskih* rješenja, koja su naročito interesantna zbog svoje lokaliziranosti i postojanosti. Solitoni su valni paketi koji neograničeno zadržavaju svoj oblik i ostaju lokalizirani uprkos disperziji sistema (koja, sama po sebi, vodi gubljenju lokalizacije) i nelinearnosti (koja teži promjeni oblika vala i njegovom lomljenju).

Zbog nelinearnosti, postupak analitičkog rješavanja KdV jednačine, osim u najjednostavnijim slučajevima, zahtijeva golem matematički aparat, koji ne vodi uvijek rješivim problemima. Vidjeli smo primjer metode Bargmannovih potencijala, koja se već u drugom redu bitno usložnjava, dok je račun u trećem redu iznimno zamršen. Nije zamršen samo računski postupak traženja egzaktnih rješenja, već i sâmi analitički izrazi tih rješenja, koji za multiplete viših redova postaju fantanstično složeni. Zbog toga su numeričke metode od ključne važnosti za rješavanje i provjeru rješenja KdV jednačine.

Numerički smo ispitali neke počente uvjete, gdje smo vidjeli da je soliton zaista jedna posebna vrsta valnog paketa, jer se tipični uobičajeni oblik valnog paketa, gausijan, u KdV sistemu raspada na komponente solitonskih oblika  $\text{sech}^2$ .

Ispitali smo i rasijanje dva solitona, gdje je nedvosmislen rezultat da solitoni zaista u potpunosti zadržavaju svoju formu i brzinu nakon sudara. U ovom rasijanju uočili smo i fazni pomak, tipičan za nelinearne interakcije.

Konačno smo proučili i narušenje linearne superpozicije promatrajući dva solitona koji su u početnom trenutku bili direktno superponirani jedan na drugi. Vremenski razvoj ovakvog sistema se bitno razlikovao od onog kada su ta dva ista solitona bili superponirani tako da su u početnom trenutku bili razmaknuti. Početna formacija od dva superponirana solitona se nije raspala samo na ta dva solitona, već i na niz drugih, što je posljedica nelinearnih efekata.

## A Dodaci

### A.1 Otkriće solitona i KdV jednačine

Solitonski val je po prvi put uočio škotski inženjer John Scott Russell 1834. godine. Evo tog događaja opisanog njegovim riječima<sup>24</sup>:

Vjerujem da ću najbolje predstaviti fenomen opisujući okolnosti mog prvog susreta s njim. Proučavao sam kretanje broda kojeg je par konjâ brzo vukao duž uskog kanala, kada se brod iznenada zaustavio — ali ne i masa vode u kanalu koju je on pokrenuo; ona se akumulirala oko pramca broda u stanju žestoke pobuđenosti, zatim, naglo ostavivši ga iza sebe, krenula naprijed velikom brzinom, uzimajući oblik velikog osamljenog izdignuća, zaobljene, glatke i dobro definirane gomile vode, koja je nastavila svoj put duž kanala bez vidljive promjene oblika i smanjenja brzine. Slijedio sam je na konju, i pretekao je, dok se ona kretala brzinom od nekih osam ili devet milja na sat, zadržavajući početni oblik od nekih trideset stopa dužine i stope do stope i po visine. Postepeno se smanjila, i nakon praćenja od jedne ili dvije milje, izgubio sam je u zavojima kanala. To je bio, u mjesecu avgustu 1834. godine, moj prvi susret sa tim jedinstvenim i lijepim fenomenom kojeg sam nazvao Translacijski val.<sup>25</sup>

Russell je potom, u deset narednih godina, vršio detaljne eksperimente u laboratorijskim uslovima, rezultati kojih su potakli dalje radove Airyja<sup>26</sup> i Stokesa<sup>27</sup>. Stokes se bavio spektralnom analizom solitonskih valova, i došao je do rezultata o proporcionalnosti brzine sa kvadratom omjera amplitude i širine vala, ali nije uspio doći do jednačine širenja, (pogrešno) zaključujući da se radi o “nedefinisanom nizu valova koji posjeduju svojstvo da se šire

---

<sup>24</sup> RUSSELL, J. SCOTT, Report on Waves. U: John Murray, editor, *Report on the Fourteenth Meeting*, str. 311–390, London, 1844. British Association for the Advancement of Science.

Ovaj dio Russellovog izvještaja se često citira u literaturi o solitonima. Za originalni tekst vidjeti npr. [http://www.ma.hw.ac.uk/~chris/scott\\_russell.html](http://www.ma.hw.ac.uk/~chris/scott_russell.html).

<sup>25</sup>Ova pojava je uspješno rekonstruisana u julu 1995. godine, na istom mjestu gdje ju je prvi put uočio Scott Russell – na Union Canalu, blizu Edinburga. Očevici ove rekonstrukcije bili su naučnici okupljeni na konferenciji o nelinearnim valovima koja se održavala na Herriot-Watt univerzitetu, blizu samog kanala. Vidjeti <http://www.ma.hw.ac.uk/solitons/press.html>.

<sup>26</sup> AIRY, G. B., Tides and Waves. U *Encyclopaedia Metropolitana*, London, 1845. article 192.

<sup>27</sup> STOKES, G. G., On the theory of oscillatory waves. *Trans. Camb. Phil. Soc.* **8** (1847) 197-229.

uniformnom brzinom” [2, str. 31], [3, str. 1-5]. Na osnovu njegovih i Airyjevih proračuna, činilo se da bi solitonski val morao biti nestabilan, i da se ne bi mogao održati onoliko koliko je Russell tvrdio [4, str. 361].

1870-tih godina, istraživanja su nastavili Boussinesq<sup>28</sup> i Rayleigh<sup>29</sup>. Interesantno je da je upravo Boussinesq, u svom radu iz 1877. godine, prvi predložio KdV jednačinu, i našao njeno egzaktno rješenje (2.6), upoređujući ga sa Russellovim opažanjima. Međutim, taj njegov, preko 600 stranica dug rad, nije privukao pažnju savremenika, i nije mu pripisana dužna zasluga [2, str. 31], [3, str. 6-7], a jednačina je kasnije dobila ime po radu D. J. Kortewega i G. de Vriesa iz 1895. godine<sup>30</sup>. Ovi radovi Boussinesqa, Rayleigha i Kortewega i de Vriesa su ukazali na greške Stokesa i Airyja, i definitivno potvrdili prvobitne rezultate Russella [4, str. 362].

## A.2 Diskretna Fourierova transformacija

Diskretni (ili konačni) Fourierov transformat predstavlja spektralni razvoj funkcije na osnovu njene vrijednosti u konačnom broju tačaka. Neka je  $u(x)$  funkcija zadana na segmentu  $[0, 2\pi]$ ,  $N \in \mathbb{N}$ , i  $\{x_j = j(2\pi/N), j = 0, 1, \dots, N-1\}$ . Označimo vrijednosti funkcije  $u$  u ovim tačkama:

$$u_j = u(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, N-1. \quad (\text{A.1})$$

Želimo da funkciju  $u$  prikažemo kao trigonometrijski red:

$$u(x) = \sum_k q_k e^{ikx}. \quad (\text{A.2})$$

Kako na raspolaganju imamo  $N$  vrijednosti  $u_j$ , za očekivati je da će i transformat  $q_k$  imati  $N$  nezavisnih vrijednosti:<sup>31</sup>

$$u_j = \sum_{k=0}^{N-1} q_k e^{2\pi ijk/N}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1. \quad (\text{A.3})$$

<sup>28</sup> BOUSSINESQ, M. J., Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d’un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. *J. Math. Pure. Appl.*, **17** (1872) 55-108.; BOUSSINESQ, M. J., Essai sur la théorie des eaux courantes. *Mémoires présentés par divers savants à l’Académie des Sciences Inst. France (séries 2)*, **23** (1877) 1-680.

<sup>29</sup> RAYLEIGH, J. W. S., On Waves. *Phil. Mag.* **1** (1876).

<sup>30</sup> KORTEWEG, D. J. & DE VRIES, G., On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary wave, *Phil. Mag.*, **39** (1895) 422-443.

<sup>31</sup> Pokazuje se da ako je funkcija  $u(x)$  frekventno ograničena tako da za njen Fourierov transformat vrijedi  $\mathcal{F}(u) < N/4\pi$ , tada je (kontinuirana) funkcija  $u(x)$  jednoznačno određena (diskretnim) vrijednostima  $\{q_0, q_1, \dots, q_{N-1}\}$  (*Nyquistov teorem*).

Označimo:

$$\omega = e^{2\pi i/N}. \quad (\text{A.4})$$

Razvoj poprima jednostavnu formu:

$$u_j = \sum_{k=0}^{N-1} q_k \omega^{jk}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1, \quad (\text{A.5})$$

koja se može zapisati i matricno:

$$u = \Omega q, \quad (\text{A.6})$$

gdje je  $\Omega = [\omega^{jk}]$  matrica potencija eksponencijalnog faktora  $\omega$ , pri čemu je eksponent produkt cjelobronih indeksa  $j \times k$ , dok su  $u$  i  $q$  jednostupčane matrice. Lako se vidi da je:

$$\Omega \Omega^* = NI, \quad (\text{A.7})$$

pa je:

$$\Omega^{-1} = \frac{1}{N} \Omega^*, \quad (\text{A.8})$$

tako da imamo:

$$q = \Omega^{-1} u = \frac{1}{N} \Omega^* u. \quad (\text{A.9})$$

Tako smo dobili formulu za računanje koeficijenata  $q_k$  u razvoju (A.3):

$$q_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} u_j (\omega^{jk})^*, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (\text{A.10})$$

**Izbor konvencije.** Relacije (A.3) i (A.10) predstavljaju međusobno inverzne transformacije, i sada imamo slobodu šta nazvati Fourierovom transformacijom, a šta inverznom Fourierovom transformacijom. Obje konvencije<sup>32</sup> se koriste, a mi ćemo, priklanjajući se onoj koja se koristi u *Numerical*

---

<sup>32</sup> Moguće su, zapravo, četiri konvencije, koje odgovaraju kombinacijama položaja faktora  $1/N$  u odnosu na predznak eksponenata, i naziva FT/IFT, međutim, obično se faktor  $1/N$  stavlja u inverznu transformaciju. Za naše potrebe, pak, relevantno je samo koji predznak eksponenta odgovara transformaciji, a koji inverznoj transformaciji.

*Recipes* [8, §12], nazvati ovu prvu transformacijom, a drugu inverznom transformacijom (dakle vršimo zamjenu uloga  $u$  i  $q$  u gore navedenom):

$$\mathcal{F}(u) = q, \quad q_k = \sum_{j=0}^{N-1} u_j e^{2\pi i j k / N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (\text{A.11a})$$

$$\mathcal{F}^{-1}(q) = u, \quad u_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} q_k e^{-2\pi i j k / N}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1. \quad (\text{A.11b})$$

Kada se odabere jedna konvencija, treba je se konzistentno držati, jer od izbora konvencije zavisi predznak diferencijalnog operatora u  $k$ -prostoru (vidjeti dio 3.1).

**Implementacija.** Fourierov transformat u numeričkom rješavanju KdV jednačine (§3.1) implementiran je u programu datom u §B funkcijom `cfour1`, koja je neznatna modifikacija funkcije `four1` iz *Numerical Recipes* [8, §12.2]. Dok faktor  $1/N$  u inverznoj transformaciji (A.11b) nije uključen u izvornu funkciju `four1`, već je tu množenje s tim faktorom tamo potrebno posebno izvršiti, funkcija `cfour1` vodi računa o ovome i vraća gotov inverzni transformat.

## B Programski kôd

```

1  /*
2     KdV JEDNACINA
3     implicitna - spektralna metoda
4
5     http://bojan.info/diplomski/num/kdv.c
6
7     Napomene:
8     - Poziva gnuplot, koji treba biti instaliran na sistemu
9       (po potrebi promijeniti "wgnuplot" u "gnuplot"
10      na kraju funkcije cgplot.)
11     - Izbor gnuplot terminala (GIF ili LaTeX)
12       se podesava sa #define GIF
13     - Za izlaz napraviti folder 'output/gif'
14       odn. 'output/latex'.
15     - Pocetni uvjet zadati sa #define START(x)
16  */
17
18  #include <stdio.h>
19  #include <stddef.h>
20  #include <stdlib.h>

```

```

21 #include <math.h>
22
23 /*
24     PRETPROCESORSKE VARIJABLE
25 */
26 #define PI      (4 * atan(1))
27
28 /* prostorna resetka */
29 #define N      1024 /* broj prostornih celija */
30 #define L      50.0 /* duzina prostornog intervala */
31 #define X(j)   (j*L/N) /* j-ti cvor */
32 #define A      (L/(2*PI))
33
34 /* vremenska diskretizacija */
35 #define DT     .005 /* vremenski korak */
36 #define T      11.0 /* max. vrijeme */
37 #define GPSTEP 99 /* plot svakih GPSTEP+1 koraka */
38
39 /* koeficijenti */
40 #define DISP   1.0 /* koeficijent disperzije */
41
42 /* pocetni uvjet */
43 #define START(x) 12/A*(.64/(cosh(.8*(x-5))*cosh(.8*(x-5)))\
44 + .25/(cosh(.5*(x-5))*cosh(.5*(x-5))))
45 /* 2 solitona: 12/A*(.64/(cosh(.8*(x-5))*cosh(.8*(x-5)))\
46 + .25/(cosh(.5*(x-15))*cosh(.5*(x-15)))) */
47 /* gausijan: ( exp(-2*(x-.25*L)*(x-.25*L)) / A ) */
48
49 /* gnuplot */
50 #define GIF    0 /* 0/1 = LaTeX/gif terminal */
51 #define XMIN   0.0*L /* min. apscise */
52 #define XMAX   1.0*L /* max. apscise */
53 #define YMIN   -.1 /* min. ordinate */
54 #define YMAX   8.0 /* max. ordinate */
55
56 /* NR */
57 #define NR_END 1
58 #define FREE_ARG char*
59 #define SWAP(a,b)  tempr=(a);(a)=(b);(b)=tempr
60
61 /*
62     PROTOTIPOVI FUNKCIJA
63 */
64 void init(__complex__ float u[]);
65 void cgplot(__complex__ float u[], int n);
66
67 /* funkcije adaptirane iz NR */
68 __complex__ float *cfvector(long nl, long nh);
69 void free_cfvector(__complex__ float *v, long nl, long nh);

```

```

70 void cfour1(__complex__ float data[], unsigned long nn, int isign);
71
72 /* originalne NR funkcije */
73 void nrerror(char error_text[]);
74 float *vector(long nl, long nh);
75 int *ivector(long nl, long nh);
76 void free_vector(float *v, long nl, long nh);
77 void free_ivector(int *v, long nl, long nh);
78
79
80 int main()
81 {
82     __complex__ float *u; /* valna funkcija */
83     u = cfvector(0,N-1);
84     init(u); /* zadavanje pocetnih uvjeta */
85
86     __complex__ float *v, *w, *temp; /* pomocni vektori */
87     v = cfvector(0,N-1);
88     w = cfvector(0,N-1);
89     temp = cfvector(0,N-1);
90
91     __complex__ float *uop, *bop; /* dif. oper. u k-prostoru */
92     uop = cfvector(0,N-1); /* operator U */
93     bop = cfvector(0,N-1); /* operator B */
94
95     int *kk; /* vektor sa valnim brojevima */
96     kk = ivector(0,N-1);
97
98     int j; /* brojac za koracanje kroz x-prostor */
99     int k; /* brojac za koracanje kroz k-prostor */
100    int i; /* brojac za iteraciju rjesenja implicitne jedn.*/
101
102    float m = DISP * DT / pow(A,3); /* pomocni faktor */
103    __complex__ naz; /* naziivnik za uop i bop */
104    for(k=0; k<N; k++) {
105        /* inicijalizacija kk */
106        if(k<=N/2)
107            kk[k] = k;
108        else
109            kk[k] = k - N;
110        /* inicijalizacija uop i bop */
111        naz = 1.0 + 0.5i * m * pow(kk[k],3);
112        uop[k] = (1.0 - 0.5i * m * pow(kk[k],3)) / naz;
113        bop[k] = (0.25i * DT * kk[k]) / naz;
114    }
115
116    int ti = 0; /* brojac vremenskih koraka */
117    int tm = (int) T/DT; /* broj vremenskih koraka */
118    int gpi = 0; /* brojac za iscrtavanje */

```



```

119     for(ti=0; ti<tm; ti++) { /* koraci kroz vrijeme */
120         printf("procesira_se_korak_%d\n", ti);
121
122         if(!gpi--) { /* ako je brojac gpi = 0 */
123             printf("iscrtava_se_korak_%d\n", ti);
124             for(j=0; j<N; j++)
125                 temp[j] = A * u[j];
126             cgplot(temp,ti); /* pozovi plot funkciju */
127             gpi = GPSTEP; /* resetuj brojac */
128         }
129
130         for(j=0; j<N; j++)
131             temp[j] = u[j]*u[j]; /* temp = u^2 */
132         cfour1(u,N,1); /* u = FFT(u) */
133         cfour1(temp,N,1); /* temp = FFT(u^2) */
134
135         for(k=0; k<N; k++){
136             /* v = v(k), prethodni vremenski korak */
137             v[k] = uop[k]*u[k] + bop[k]*temp[k];
138             /* w = w(k) = u_1, prvi korak iteracije */
139             w[k] = uop[k]*u[k] + 2*bop[k]*temp[k];
140         }
141         cfour1(v,N,-1); /* v = v(x) = F^-1(v(k)) */
142         cfour1(w,N,-1); /* w = w(x) = F^-1(w(k)) */
143         for(j=0; j<N; j++) {
144             v[j] = __real__ v[j]; /* v = Re(v) */
145             w[j] = __real__ w[j]; /* w = Re(w) */
146         }
147
148         /* Iterativno rjesenje implicitne jednacine */
149         for(i=2; i<5; i++) { /* (w: i=1); ide se do i=4 */
150             for(j=0; j<N; j++)
151                 temp[j] = w[j]*w[j]; /* temp = w^2 */
152             cfour1(temp,N,1); /* temp = FFT(w^2) */
153             for(k=0; k<N; k++)
154                 temp[k] *= bop[k]; /* temp(k) = bop*FFT(w^2) */
155             cfour1(temp,N,-1); /* temp(x) */
156             for(j=0; j<N; j++)
157                 w[j] = v[j] + __real__ temp[j]; /* w = u_i */
158         }
159
160         for(j=0; j<N; j++)
161             u[j] = w[j]; /* u(t+dt) = w = u_4 */
162     }
163
164     free_cfvector(uop,0,N-1);
165     free_cfvector(bop,0,N-1);
166     free_cfvector(u,0,N-1);
167     free_cfvector(v,0,N-1);

```

```

168     free_cfvector(w,0,N-1);
169     free_cfvector(temp,0,N-1);
170
171     return 0;
172 }
173
174 void init(__complex__ float u[])
175 /* inicijalizacija - pocetni uslov */
176 {
177     int j;
178     float xj;
179     for(j=0; j<N; j++) {
180         xj = X(j); /* j-ti cvor */
181         u[j] = START(xj); /* pocetna vrijednost */
182     }
183 }
184
185 void cgplot(__complex__ float y[], int n)
186 /*
187     Iscrtava realni dio kompleksnog vektora y[0,1,...,N-1].
188     n je samo indeks koraka za oznacavanje grafikona.
189 */
190 {
191     /* Ispis vrijednosti u data.dat */
192     FILE *data; /* datoteka sa vrijednostima za iscrtavanje */
193     data = fopen("data.dat", "w");
194     int j;
195     for(j=0; j<N; j++) /* zapisivanje vrijednosti u datoteku */
196         fprintf(data, "%f\t%f\n", X(j), __real__ y[j]);
197     fclose(data);
198
199     /* Ispis gnuplot komandi u cmd.gp */
200     FILE *gp; /* datoteka sa gnuplot komandama */
201     gp = fopen("cmd.gp", "w");
202     if(GIF) {
203         fprintf(gp, "set terminal gif\n");
204         fprintf(gp, "set output 'output\\%5.5d.gif'\n", n);
205     } else {
206         fprintf(gp, "set terminal latex\n");
207         fprintf(gp, "set output 'output\\%5.5d.tex'\n", n);
208     }
209     fprintf(gp, "plot [%f:%f] ", XMIN, XMAX);
210     fprintf(gp, "[%f:%f] 'data.dat' ", YMIN, YMAX);
211     fprintf(gp, "title \"u(x,t=%f)\" ", n*DT);
212     fprintf(gp, "smooth cspline\n");
213     fclose(gp);
214
215     /* Poziv gnuplota */
216     system("wgnuplot cmd.gp");

```

```

217 }
218
219 /*
220      FUNKCIJE ADAPTIRANE IZ NR
221 */
222
223 __complex__ float *cfvector(long nl, long nh)
224 /* preradjena NR funkcija vector za __complex__ float */
225 {
226     __complex__ float *v;
227
228     v((__complex__ float *)malloc((size_t)
229         ((nh-nl+1+NR_END)*sizeof(__complex__ float)));
230     if (!v) nrerror("allocation failure in vector()");
231     return v-nl+NR_END;
232 }
233
234 void free_cfvector(__complex__ float *v, long nl, long nh)
235 /* preradjena NR funkcija free_vector za __complex__ float */
236 {
237     free((FREE_ARG) (v+nl-NR_END));
238 }
239
240 void cfour1(__complex__ float cdata[], unsigned long nn, int isign)
241 /*
242     Preradjena NR funkcija four1.
243     Interna implementacija nije mijenjana, samo ulaz/izlaz.
244     Ulaz: umjesto float data[1..2*nn],
245           prima __complex__ float cdata[0..nn-1].
246     Izlaz: za inverznu transformaciju,
247           vraca normiran transformat (pomnozen faktorom 1/nn).
248 */
249 {
250     /* Procedure za konverziju ulaza/izlaza */
251     void c2r(__complex__ float c[], float r[])
252     /* pretvara kompleksni vektor c[0..nn-1]
253        u realni vektor r[1..2*nn] */
254     {
255         int i;
256         for(i=0; i<nn; i++) {
257             r[2*i+1] = __real__ c[i]; /* (1,3,...) su realni */
258             r[2*i+2] = __imag__ c[i]; /* (2,4,...) su imag. */
259         }
260     }
261     void r2c(float r[], __complex__ float c[])
262     /* pretvara realni vektor r[1..2*nn]
263        u kompleksni vektor c[0..nn-1] */
264     {
265         int i;

```

```

266         for(i=0; i<nn; i++)
267             c[i] = r[2*i+1] + 1.0i * r[2*i+2];
268     }
269
270     /* Prerada ulaza */
271     float *data;
272     data = vector(1,2*nn);
273     c2r(cdata,data);
274
275     /* Originalni dio (four1) */
276     unsigned long n,mmax,m,j,istep,i;
277     double wtemp,wr,wpr,wpi,wi,theta;
278     float tempr,tempi;
279
280     n=nn << 1;
281     j=1;
282     for (i=1;i<n;i+=2) {
283         if (j > i) {
284             SWAP(data[j],data[i]);
285             SWAP(data[j+1],data[i+1]);
286         }
287         m=nn;
288         while (m >= 2 && j > m) {
289             j -= m;
290             m >>= 1;
291         }
292         j += m;
293     }
294
295     mmax=2;
296     while (n > mmax) {
297         istep=mmax << 1;
298         theta=isign*(6.28318530717959/mmax);
299         wtemp=sin(0.5*theta);
300         wpr = -2.0*wtemp*wtemp;
301         wpi=sin(theta);
302         wr=1.0;
303         wi=0.0;
304         for (m=1;m<mmax;m+=2) {
305             for (i=m;i<=n;i+=istep) {
306                 j=i+mmax;
307                 tempr=wr*data[j]-wi*data[j+1];
308                 tempi=wr*data[j+1]+wi*data[j];
309                 data[j]=data[i]-tempr;
310                 data[j+1]=data[i+1]-tempi;
311                 data[i] += tempr;
312                 data[i+1] += tempi;
313             }
314             wr=(wtemp=wr)*wpr-wi*wpi+wr;

```

```

315         wi=wi*wpr+wtemp*wpi+wi;
316     }
317     mmax=istep;
318 }
319 /* Kraj originalnog dijela (four1) */
320
321 /* Dio za preradu izlaza */
322 r2c(data,cdata);
323 free_vector(data,1,2*nn);
324 /* Za inverznu transformaciju dodaje se faktor 1/nn */
325 if(isign==-1){
326     for(j=0; j<nn; j++) {
327         cdata[j] *= 1.0/nn;
328     }
329 }
330 }
331
332
333 /*
334 ORIGINALNE NR FUNKCIJE
335 */
336
337 void nrerror(char error_text[])
338 /* Numerical Recipes standard error handler */
339 {
340     fprintf(stderr,"Numerical_Recipes_run-time_error...\n");
341     fprintf(stderr,"%s\n",error_text);
342     fprintf(stderr,"...now_exiting_to_system...\n");
343     exit(1);
344 }
345
346 float *vector(long nl, long nh)
347 /* allocate a float vector
348 with subscript range v[nl..nh] */
349 {
350     float *v;
351
352     v=(float *)malloc((size_t)
353 ((nh-nl+1+NR_END)*sizeof(float)));
354 if (!v) nrerror("allocation_failure_in_vector()");
355 return v-nl+NR_END;
356 }
357
358 int *ivector(long nl, long nh)
359 /* allocate an int vector with subscript range v[nl..nh] */
360 {
361     int *v;
362
363     v=(int *)malloc((size_t) ((nh-nl+1+NR_END)*sizeof(int)));

```

```

364     if (!v) nrerror("allocation failure in ivector()");
365     return v-nl+NR_END;
366 }
367
368 void free_vector(float *v, long nl, long nh)
369 /* free a float vector allocated with vector() */
370 {
371     free((FREE_ARG) (v+nl-NR_END));
372 }
373
374 void free_ivector(int *v, long nl, long nh)
375 /* free an int vector allocated with ivector() */
376 {
377     free((FREE_ARG) (v+nl-NR_END));
378 }

```

## Literatura

- [1] LAMB, G. L. JR., *Elements of Soliton Theory*, John Wiley & Sons, 1980.
- [2] SATTINGER, D. H., *Scaling, Mathematical Modeling, & Integrable Systems*, <http://www.math.yale.edu/~dhs35/dmv.ps> (1997).
- [3] SATTINGER, D. H., *Solitons & Nonlinear Dispersive Waves*, <http://www.math.yale.edu/~dhs35/rav.ps> (1998).
- [4] PALAIS, S. C., The Symmetries of Solitons, *Bull. Amer. Math. Soc.* **34** (1997) 339-403  
(<http://www.ams.org/bull/1997-34-04/S0273-0979-97-00732-5/home.html>).
- [5] BEALS, R., D. H. SATTINGER, & J. SZMIGIELSKI, *Continued Fractions & Integrable Systems*, <http://www.math.yale.edu/~dhs35/opsfa.pdf>
- [6] ARNOLD, V. I., *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Second Edition, Springer, 1989.
- [7] ARFKEN, G. B. & WEBER, H. J., *Mathematical Methods for Physicists*, Fourth Edition, Academic Press, 1995.
- [8] PRESS, W. H. ET AL., *Numerical Recipes in C - The Art of Scientific Computing*, Second Edition, Cambridge University Press, 1992, <http://www.library.cornell.edu/nr/cbookcpdf.html>.